РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

На правах рукописи

Выхованец Валерий Святославович

КРАТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Специальность: 05.13.13 – Вычислительные машины, комплексы, системы и сети,
05.13.16 – Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва, 1998

Работа выполнена в Институте проблем управления РАН.

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор В.Д. Малюгин.

Официальные опоненты:

доктор технических наук, профессор Н.Г. Топольский,

кандидат технических наук А.И. Потехин.

Ведущая организация:

Институт проблем передачи информации РАН

(г. Москва).

Защита состоится 27.04. 1998 г. в 11.00 на заседании диссертационного совета Д002.68.01 Института проблем управления по адресу: 117806, г. Москва, Профсоюзная, 65.

С диссератцией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем управления.

Автореферат разослан 5 марта 1998 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

к.т.н. Е.В. Юркевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Для таких задач, как управление сложными объектами, обработка изображений и распознавание образов, принятие решений, дискретная оптимизация, моделирование дискретных устройств – основная проблема сводится к обработке бинарных и многозначных (логических) данных и заключается в эффективном вычислении (реализации) логических функций.

Традиционная архитектура ЭВМ не предусматривает специализированных средств для логических вычислений. Поддержка логических вычислений сводится к булевым операциям, выполняемым арифметико-логическим устройством (АЛУ) – на аппаратном уровне, и к командам условного перехода – на уровне программ.

Известна реализация логической обработки данных посредством параллельных логических вычислений, когда одновременно вычисляется система логических функций на одном наборе переменных, со сменой переменных вычисления повторяются. Наименее изученными остаются вопросы, связанные с разновидностью параллельных логических вычислений – кратными вычислениями, когда одновременного вычисляется несколько значений одной или системы логических функций на разных наборах ее аргументов. Величина кратности m лежит в диапазоне от 1 до 2^n, где n – число аргументов, что означает соответственно однократные и полнократные логические вычисления.

Кратные логические вычисления возникают при параллельном управлении несколькими одинаковыми объектами, находящимися в разных физических состояниях; при моделировании (воспроизведении) системы на нескольких входных воздействиях, например вычисление модели при тестировании и технической диагностике дискретных устройств; в системах управления, где требуется быстрая реакция на изменение внешних условий, можно с упреждением просчитать нужные действия на возможных (вероятных) входных наборах, например, находящихся на единичном расстоянии по Хеммингу от текущего, и при поступлении нового набора уже иметь нужную реакцию.

В области математических методов на проблему кратных вычислений также не делается должного акцента. Подразумевается, что кратные вычисления сводятся к повторению вычислений известными методами на измененных наборах переменных. С учетом последующей технической реализации это зачастую оказывается неэффективным, ибо приходится каждое значение вычислять отдельно, с большими затратами времени и оборудования.

Целью работы является разработка и исследование методов кратных логических вычислений и их эффективная техническая реализация. Для достижения данной цели решаются следующие задачи:

1) разработка средств формального описания кратных вычислений;

2) обоснование методов кратных вычислений и исследование их эффективности;

3) техническая реализация кратных вычислений на современных вычислительных средствах.

Методы исследования. Выполненная работа основана на методах булевой алгебры и алгебры k-значной логики, спектральной теории логических функций, теории конечных атоматов. При проведении вычислительного эксперимента применялись методы структурного и объектно-ориентированного программирования, теории синтаксического анализа и компиляции.

Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке, обосновании и исследовании методов кратных логических вычислений на основе обобщенной методики синтеза полиномиальных форм в расширенном базисе операций и при смешанной значности переменных и функций, в ориентации на эффективную реализацию кратных вычислений на различных уровнях вычислительных средств.

Практическая ценность полученных результатов состоит в эффективной технической реализации логических вычислений на основе использования комплекса программ для логических исследований, библиотеки классов для объектно-ориентированной среды программирования и структур логических процессорных элементов.

Внедрение результатов исследования проводилось в рамках научно-исследовательских работ и опытно-конструкторских разработок, выполненных в 1993-1997 гг. в научно-исследовательской лаборатории "Математическое моделирование" Тираспольского университета. Результаты исследования приняты к реализации в АО "Электромаш" (г. Тирасполь) и используются в учебном процессе.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава Тираспольского университета (1994-1997 гг.), на расширенных семинарах 31 лаборатории Института проблем управления (1995-1997 гг.), Всероссийской конференции "Информационно-управляющие системы и специализированные вычислительные устройства для обработки и передачи данных" (Махачкала, 1996 г.), на семинаре кафедры ИУ-3 МГТУ им. Н.Э. Баумана (1997 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ.

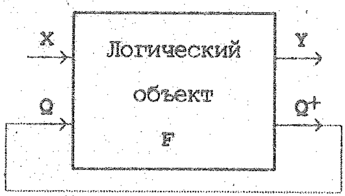
Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 123 наименований и двух приложений, изложена на 173 страницах машинописного текста и иллюстрируется 21 рисунком и 7 таблицами.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования.

В первой главе приводится критический обзор существующих методов логической обработки данных, исследуется их место и роль в моделировании и реализации дискретных устройств.

Показано, что современное состояние информационной технологии характеризуется принципиальным изменением роли логической обработки данных. Решение логических задач формализуется в алгебре логики и реализуется в виде системы логических функций в конечно-автоматном виде (рис. 1), где X – вектор независимых переменных (входное воздействие), Y – вектор наблюдаемых значений (состояние выхода), Q – вектор внутренних переменных (состояние объекта), Q^+ – вычисляемое следующее состояние, F – система логических функций.



$$\begin{bmatrix} Y \\ Q^+ \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} X \\ Q \end{bmatrix}\right)$$

Рис. 1. Логическая обработка данных

Логическая обработка данных разделяется на задачи синтеза, моделирования, анализа и вычисления (табл. 1).

Таблица 1

Задача	Исходные данные	Результат
Вычисление	X, Q, F	Y, Q^+
Анализ	F, Y, Q^+	X, Q
Синтез	X, Q, Y, Q^+	F
Моделирование	X, Y	F, Q, Q^+

При логическом вычислении ищутся значения системы функций на заданных наборах аргументов. Логический анализ связан с обратной задачей – решением системы логических уравнений. При логическом синтезе на основе табличного представления получают формульное описание системы, а при моделировании по результатам наблюдений строится автоматная таблица, из которой также синтезируется формульное описание – модель объекта. Верификации модели осуществляется ее вычислением на разных наборах переменных. Таким образом логическая обработка данных может быть сведена к логическому синтезу и кратным логическим вычислениям.

Исследуются известные методы логических вычислений и формы представления логических данных. Делается вывод, что всякая техническая реализация логической обработки своей структурой повторяет формульное представление, а основой для повышения эффективности логических вычислений служит расширение базиса операций при логическом синтезе.

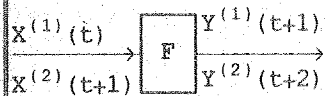
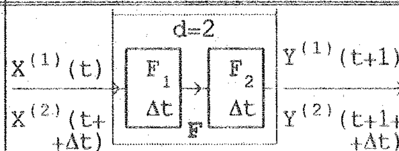
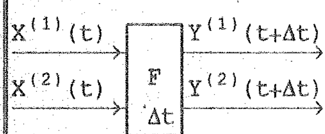
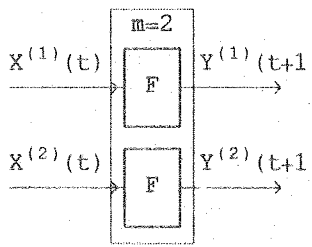
Рассмотрен метод параллельных логических вычислений, когда реализуется параллелизм по логическим функциям, а синтез сводится к получению формы с наименьшим количество знаков операций и переменных. Выделяются три подхода к минимизации: тождественные преобразования формул в заданном базисе операций, выбор оптимального базиса и структурная минимизация формы. Показываются трудности использования перечисленных подходов для совместной минимизации достаточно сложных систем функций.

Кратные логические вычисления рассмотрены как особый случай параллельных логических вычислений и представляют собой такую организацию вычислительного процесса, когда функция или система функций вычисляется сразу на нескольких наборах переменных (реализуется параллелизм по наборам переменных).

Приводится классификация методов структурной организации кратных вычислений, в основу которой положены принципы повторности вычислений: повторность во времени и в пространстве, параллельная и последовательная повторность. К методами структурной организации кратных вычислений отнесены последовательные вычисления во времени (повторение или повторная обработка), последовательные вычисления в пространстве (конвейеризация или многостадийная обработка), параллельные вычисления в пространстве (распараллеливание или многоэлементная обработка), а также параллельные вычисления во времени (табл. 2).

Введены критерии эффективности кратных вычислений: эффективность по времени вычисления ξ, эффективность по сложности вычисления η (обратно пропорциональна аппаратным затратам v_m) и комплексная эффективность $\vartheta=\xi\cdot\eta$, определяемые относительно однократного случая. К параллельным вычислениям во времени отнесены такие методы, при реализации которых комплексный критерий эффективности ϑ больше единицы, а исходные данные (результаты) вычислений подаются (снимаются) одновременно.

Таблица 2

	Во времени	В пространстве
Последоват.	 $\xi=1,\ \eta=1,$ $\vartheta=1$	 $\xi=dm/(m-1),\ \eta=1,$ $\vartheta=dm/(m-1)$
Параллельно	 $\xi=m/\Delta t,\ \eta=1/v_m,$ $\vartheta=m/v_m\Delta t$	 $\xi=m,\ \eta=1/m,$ $\vartheta=1$

Современные высокопроизводительные системы обработки данных анализируются на трех уровнях: крупноблочном (программном), среднеблочном (командном) и мелкоблочном (операционном), отличающихся мерой крупности операций обработки. Показано, что наиболее распространенными методами структурной организации кратных вычислений являются повторение, конвейеризация и распараллеливание.

Дается формальная интерпретация различных типов логических вычислений и приводится обобщенная форма описания кратных вычислений на основе представления об упорядоченной совокупности (кортеже) логических функций, наборов переменных и их ортогонального объединения. Традиционная реализация одной булевой функции вида $f(X)=Y$ представлена как операция

$$f(X^{(i)})=Y^{(i)}, \quad i=\overline{0,\ 2^n-1},$$

что означает нахождение значения функции $Y^{(i)}$ при подстановке в последнюю аргумента $X^{(i)}$. Более сложный случай – параллельные логические вычисления над полиномом $P(X)=Y$, что означает операцию

$$P(X^{(i)})=\overset{q}{\underset{j=1}{*}} Y_j^{(i)},$$

где * – разделительный знак, обозначающий способ ортогонального объединения; q – количество функций, описываемых полиномом.

Кратные вычисления функции $f(X)=Y$ определены как операция

$$\tilde{f}(\overset{m}{\underset{i=1}{*}} X^{(i)})=\overset{m}{\underset{i=1}{*}} Y^{(i)},$$

где m – кратность вычисления, $\tilde{f}$ – форма кратных вычислений одной функции. Известна реализация этой операции в виде векторных программ. В этом случае $\tilde{f}$ представляется выражением в базисе поразрядных логических операций.

И наконец, вычисление системы q функций с кратностью m, представленных в некоторой форме описания $\tilde{P}(\tilde{X})=\tilde{Y}$, означает операцию

$$\tilde{P}(\overset{m}{\underset{i=1}{*}} X^{(i)})=\overset{q}{\underset{j=1}{*}}\ \overset{m}{\underset{i=1}{*}} Y_j^{(i)},$$

где $\tilde{X}$ – множество наборов переменных, $\tilde{Y}$ – множество значений системы на наборах $\tilde{X}$. Из последнего следует, что описание кратных вычислений может быть представлено в виде единого выражения, объединяющего множество функции на множестве наборов переменных.

<u>Во второй главе</u> исследуются формы представления и методы реализации кратных вычислений в булевой алгебре. Рассматривается алгебра поразрядных логических операций Φ_m, в которой значения логических данных интерпретируются как числа в двоичной m-разрядной позиционной системе счисления.

Доказывается изоморфизм между алгеброй Φ_m и булевой алгеброй B_2. Это позволяет интерпретировать формулы B_2 в Φ_m, причем при $m=1$ Φ_m вырождается в B_2.

Показывается, что кратные вычисления системы функций

$$f_j(X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0), \quad X_i, \ f_j\in\{0,\ 1\}, \quad (j=\overline{0,\ q-1}),$$

могут быть описаны в замкнутом классе функций k-значной логики, порождаемом функционально полной в Φ_m системой операций:

$$\{I,\ X_i \circ X_j,\ X_i+X_j,\ X_i-X_j\},$$

где I - логическая единица, $I=2^m-1$; X_i, $X_j\in\{0,\ \ldots,\ I\}$; $\circ$ - некоторая поразрядная булева операция (конъюнкция, дизъюнкция, неэквиваленций); + (-) - арифметическое сложение (вычитание). Для этого каждая функция представляется в виде арифметико-логического полинома p_j (например в конъюнктивном базисе):

$$p_j(X)=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}\cdot\left(X_{n-1}^{i_{n-1}}\&\ldots\&X_0^{i_0}\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}\theta_i(X),$$

где a_{ij} - i-ый коэффициент полинома для j-ой функции, $a_{ij}\in Z$, Z - множество целых чисел; $\theta_i(X)$ - логическая часть полинома; $i=(i_{n-1}\ \ldots\ i_1\ i_0)_2$ - двоичное представление числа i. Определение степенной операции задано следующим образом:

$$X_i^j=\begin{cases} I, \text{ при } j=0, \text{ т.е. переменная } X_i \text{ не входит в } \theta_i(X); \\ X_i, \text{ при } j\neq 0, \text{ т.е. переменная } X_i \text{ входит в } \theta_i(X). \end{cases}$$

Объединение p_j производится с помощью производящей функции

$$P(X)=\sum_{j=0}^{q-1} p_j(X)\cdot(I+1)^j, \qquad (I+1)^0=I.$$

После приведения подобных слагаемых получается арифметико-логический полином в алгебре Φ_m:

$$P(X)=\sum_{i=0}^{2^n-1} A_i\theta_i(X), \qquad A_i=\sum_{j=0}^{q-1} a_{ij}(I+1)^j,$$

при вычислении которого реализуются кратные вычисления.

Для определения затрат на представление полинома оценивается диапазон изменения его коэффициентов

$$|A_i| \le \frac{(I+1)^q-1}{I} 2^{e(i)-1},$$

где $e(i)$ – количество единиц в двоичном представлении i, и опре-деляются информационные характеристики: емкость I_p и энтропия H_p:

$$I_p = \sum_{i=0}^{2^n-1} \log_2(2|A_i|+1), \text{ [бит]}, \qquad H_p = \frac{I_p}{2^n}, \text{ [бит/коэф.]}.$$

Рассматриваются процедуры кратных вычислений, для которых операционным элементом является АЛУ, а аппаратные затраты определяются информационной емкостью полинома. Комплексная эффективность процедур больше единицы, но ее асимптотическое поведение при увеличении кратности (Θ стремится к единице) позволяет заключить, что вычисление полинома в алгебре Φ_m реализует параллельные в пространстве кратные вычисления.

В третьей главе рассматриваются формы и методы кратных вычислений в k-значной логике и выбирается такая форма, которая имеет наиболее компактное описание. Исследуются матричная, арифметическая и арифметико-логическая формы.

Ортогональное объединение функций и наборов переменных в арифметико-логической форме осуществлено на основе представления произвольного натурального числа в k-ичной позиционной системе счисления, а сами функции предварительно записываются в виде полиномов:

$$p_j(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} a_{ij} \left(X_{n-1}^{i_{n-1}} \circ \ldots \circ X_1^{i_1} \circ X_0^{i_0} \right),$$

где a_{ij} – i-ый коэффициенты для j-й функции; $\circ$ – логические операции; X_i^j – переменная X_i в степени j; $i=(i_{n-1} \ldots i_1 i_0)_k$ – k-ичное представление i. Синтез полиномиальных форм рассмотрен в гл. 4.

Для объединения функций p_j на наборах переменных $X^{(r)}$ полином записывается для всех m наборов:

$$p_j(X^{(r)})=\sum_{i=0}^{k^n-1} a_{ij}\left(X_{(n-1)r}^{i_{n-1}}\circ\ldots\circ X_{1r}^{i_1}\circ X_{0r}^{i_0}\right),\quad (r=\overline{0,\ m-1}),$$

и полученные выражения объединяются в виде взвешенной суммы с коэффициентами $k^{\varphi(r,j)}$, порожденными весовой функцией $\varphi(r,\ j)$:

$$P(\tilde{X})=\sum_{r=0}^{m-1}\ \sum_{j=0}^{q-1} k^{\varphi(r,j)}\left\{\sum_{i=0}^{k^n-1} a_{ij}\theta_i(X^{(r)})\right\}.$$

Для обеспечения ортогональности объединения на вид весовой функции накладывают ограничения. Дискретная функция φ называется весовой, если в различных точках области определения ее значения различны. Она задает размещение значений функций на разных наборах переменных в разрядной сетке: номер k-ичного разряда, в котором располагается значение j-й функции p_j от r-го набора переменных $X^{(r)}$ равен $\varphi(r,\ j)$.

В результате представления весовой функции в виде суммы двух функций μ и υ: $\varphi(r,\ j)=\mu(r)+\upsilon(j)$, выводится выражение

$$P(\tilde{X})=\sum_{i=0}^{k^n-1}\tilde{A}_i(\upsilon)\tilde{\theta}_i(\tilde{X},\ \mu),$$

где $\tilde{A}_i(\upsilon)=\sum_{j=0}^{q-1} k^{\upsilon(j)}a_{ij}$, а $\tilde{\theta}_i(\tilde{X},\ \mu)=\sum_{r=0}^{m-1} k^{\mu(r)}\theta_i(X^{(r)})$, которое описывает широкий класс полиномиальных форм, отличающихся весовыми функциями, логическими и степенными операциями. При использовании арифметических операций умножения и возведения в степень получают арифметическую форму кратных вычислений.

Комплексная эффективность кратных вычислений оценивается следующим образом. Для однократного случая необходимо АЛУ с разрядностью не меннее q, время вычисления равно $s(\tau(n)+\tau_\times+\tau_+)$, где s – вычислительная сложность полинома (количество ненулевых коэффициентов); $\tau(n)$ – среднее время вычисления логической части θ_i; τ_+ $(\tau_\times)$ – время выполнения сложения (умножения). Для последовательных во времени кратных вычислений разрядность АЛУ равна $q \cdot m$, а комплексная эффективность определяется как

$$\xi = \frac{ms(\tau(n)+\tau_{\times}+\tau_{+})}{s(\tilde{\tau}(n)+\tau_{\times}+\tau_{+})} \approx \frac{m\tau(n)}{\tilde{\tau}(n)}, \quad \eta = \frac{q}{qm} = 1/m, \quad \vartheta = \xi\eta \approx \frac{\tau(n)}{\tilde{\tau}(n)},$$

где $\tilde{\tau}(n)$ – среднее время вычисления $\tilde{\theta}_i$ (кратный случай). Той же величине равна и комплексная эффективность параллельных в пространстве кратных вычислений.

Анализ последнего выражения показал, что для реализации парал-лельных во времени кратных вычислений следует уменьшать аппаратные затраты v_m (см. табл. 1). Для таких вычислений в пространстве необходимо обеспечить равенство времен $\tau(n)$ и $\tilde{\tau}(n)$, что достигается путем использования поразрядных операций при вычислении полинома:

$$P(\tilde{X}) = \sum_{i=0}^{k^n-1} \tilde{A}_i(\upsilon)\left(\tilde{X}_{n-1}^{\tilde{i}_{n-1}} \circ \ldots \circ \tilde{X}_1^{\tilde{i}_1} \circ \tilde{X}_0^{\tilde{i}_0}\right),$$

где $\tilde{A}_i = \sum_{j=0}^{q-1} k^{\upsilon(j)} a_{ij}$, $\tilde{X}_j = \sum_{r=0}^{m-1} k^{\mu(r)} x_{jr}$, $\tilde{i}_j = \sum_{r=0}^{m-1} k^{\mu(r)} i_j$. При $k=2$, $\mu=r$ и $\upsilon=mj$ получают полином в алгебре Φ_m. Последнее выражение может быть минимизировано путем выбора различных весовых функций. Исследован случай, когда кратность вычислений изменяется от вычисления к вычислению и найдена форма, коэффициенты которой не зависят от кратности. В этом случае весовые функции имеют вид: $\mu(r)=qr$, $\upsilon(j)=j$.

Для абсолютной оценки эффективности кратных вычислений рассмотрен табличный способ реализации k-значной функции. Последний определен как самый быстродействующий, что требует $\tau_т=q$ операций выборки из памяти, а его аппаратные затраты $v_т=qk^n$ соответствуют объему памяти для хранения таблицы истинности. Для абсолютной комплексной эффективности получено выражение

$$\vartheta_a = \frac{qRk^n}{s^2 H_p\left(1+H_p+\tilde{\tau}(n)\right)},$$

где R – разрядность АЛУ, s – вычислительная сложность полинома, H_p – его информационная энтропия, $\tilde{\tau}(n)$ – среднее время вычисления $\tilde{\theta}_i$. Абсолютная эффективность ϑ_a не зависит от кратности, а ее повышение возможно как путем увеличения разрядности R, так и за счет уменьшения энтропии H_p, что достигается минимизацией коэффициентов формы.

Проверка эффективности кратных вычислений осуществляется путем сравнения сложности полинома s с эффективной сложностью

$$s_{эф} = \sqrt{\frac{qRk^n}{H_p\left(1+H_p+\tilde{\tau}(n)\right)}},$$

задающей ее граничное значение. На рис. 2 показана зависимость $s_{эф}$ от количества переменных n и от значности алгебры логики k, полученная в результате вычислительного эксперимента. Оказалось, что количество эффективных в реализации арифметико-логических полиномов значительно превосходит количество k+2n линейных полиномов, для которых вычислительная сложность равна числу переменных n.

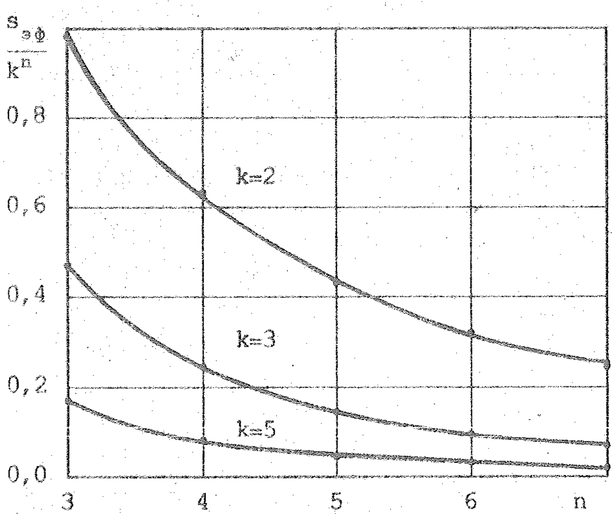


Рис. 2. Эффективная вычислительная сложность полинома

В четвертой главе рассматриваются аналитические методы синтеза полиномиальных форм и исследуется синтез форм вида:

$$p(X)=\sum_{i=0}^{k^n-1} a_i\left(c_i\delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}\ \ldots\ \delta_0 X_0^{i_0}\right)=\sum_{i=0}^{k^n-1} a_i\theta_i(X),$$

где a_i – коэффициенты формы; c_i – некоторые произвольные константы; δ_t – логические операции; $X_i^{i_t}$ – переменная X_i в логической степени i_t; $i=(i_{n-1}, \ldots, i_0)_k$ – k-ичное представление числа i; $\theta_i(X)$ – полиномиальные ортогональные функции. Порядок выполнения операций справа налево с приоритетом возведения в степень, а сами операции таковы, что область значения предыдущей операции совпадает или включается в область определения следующей.

Методика синтеза полиномиальных форм основана на дискретном ортогональном преобразовании:

$$\begin{cases} A=D\times F; \\ F=D^{-1}\times A, \end{cases}$$

где F – характеристический вектор функции, A – вектор коэффициентов формы, D и D^{-1} – матрицы прямого и обратного преобразования размерности $k^n\times k^n$. Последние получают следующим образом:

1). Задается ядро, которое определяет степенные операции и соответствующие матрицы W_t размерностью $k\times k$ с элементами

$$w_t(i,\ j)=i^j,\quad (i,\ j=\overline{0,\ k-1},\ t=\overline{0,\ n-1}),$$

где i (j) – номер строки (столбца). Строки (столбцы) матрицы W_t должны быть линейно независимы;

2). Строится матрица D^{-1} по рекуррентному правилу:

$$G_0=W_0,\quad G_{t+1}=W_t\otimes_t G_t,\quad D^{-1}=C_n\delta_n G_{n-1},\ (t=\overline{0,\ n-2}),$$

где $\otimes_t$ – обобщенная операция кронекеровского произведения; C_n – матрица констант, состоящая из k^n одинаковых строк k^n произвольных констант из области определения δ_n. Операция обобщенного кронекеровского произведения определена следующим образом:

$$W_t \otimes_t G_t = \begin{bmatrix} w_t(0,0)\delta_t G_t & w_t(0,1)\delta_t G_t & \cdots & w_t(0,I)\delta_t G_t \\ w_t(1,0)\delta_t G_t & w_t(1,1)\delta_t G_t & \cdots & w_t(1,I)\delta_t G_t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_t(I,0)\delta_t G_t & w_t(I,1)\delta_t G_t & \cdots & w_t(I,I)\delta_t G_t \end{bmatrix},$$

где I - логическая единица алгебры, $I=k-1$. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости строк (столбцов) G_t, а константы c_i задаются так, чтобы определитель D^{-1} был отличен от нуля;

3). Матрица D определяется из условия ортогональности: $D \times D^{-1}=E$, где E - единичная матрица размерности $k^n \times k^n$.

Для уменьшения сложности формирования базиса используются мультипликативные формы, синтез которых основан на свойстве обращаемости кронекеровского произведения относительно некоторой мультипликативной операции. Мультипликативная операция определена как совпадающая по значению с арифметическим умножением в некоторой ограниченной области определения. В этом случае обращение кронекеровского произведения матриц получают путем кронекеровского произведения обратных матриц.

Исследованы мультипликативные формы: булева, Уолша и обобщенная. Для булевой формы степенные операции задаются в виде булевых матриц; для формы Уолша - в виде матриц, состоящих из -1 и 1; для обобщенной формы - из -1, 0 и 1. Предложен метод минимизации мультипликативных форм, основанный на подборе степенных операций. Самой эффективной оказалась обобщенная форма, для которой мощность множества степенных операций значительно превосходит аналогичную мощность для булевой формы и формы Уолша.

На практике возможны случаи, когда объект описывается совокупностью функций с разной значностью, например, двоичными и троичными. Для описания такой системы с различной (смешанной) значностью переменных полиномом имеет вид

$$p_j(X)= \sum_{i=0}^{(k_{n-1}\cdot \ldots \cdot k_0)-1} a_{ij}\left(c_i \delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-1} \ldots \delta_0 X_0^{i_0}\right),$$

ядро преобразования строится с учетом значностей k_i переменных X_i, а операции δ_j задаются при различной значности операндов. Ортогональное объединение функций p_j со значностями k_{f_j} осуществляется с помощью производящей функции:

$$P(X) = \sum_{j=0}^{q-1} p_j(X) \prod_{t=0}^{j-1} k_{f_t}, \quad p_j(X)\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ k_{f_j}-1\}.$$

Исследована зависимость эффективности по времени от вида аналитической конструкции. Эффективность аналитической конструкции γ определяется отношением времени вычисления полинома τ_1 в булевой алгебре к времени вычисления полинома τ_2 при смешанной значности:

$$\gamma=\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{s_1(1+\tilde{\tau}_1)}{s_2(1+\tilde{\tau}_2)},$$

где s_1, s_2 – вычислительные сложности полиномов; $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ – средние времена вычисления логической части. Для произвольной таблицы логических данных построены оптимальные аналитические конструкции (табл. 3). Смешанная значность функций, в свою очередь, уменьшает энтропию полинома из-за уменьшения значений коэффициентов.

Таблица 3

Длина таблицы	Значность переменных k_j	γ
8	(2, 2, 2)	1.000
9	(3, 3)	1.454
10	(2, 5)	1.548
11	(2, 2, 3)	1.200
12	(2, 2, 3)	1.200
13	(2, 7)	1.066
14	(2, 7)	1.066
15	(2, 2, 2, 2)	1.000
16	(2, 2, 2, 2)	1.000
17	(2, 3, 3)	1.493
18	(2, 3, 3)	1.493
19	(2, 2, 5)	1.555
20	(2, 2, 5)	1.555
21	(3, 7)	1.317

Пятая, заключительная глава посвящена вопросам технической реализации кратных вычислений.

Любая реализация логического вычисления предполагает поиск оптимальных форм представления логических данных. Описывается комплекс программ для логических исследований, состоящий из следующих программных средств: LOGIC - вычисление характеристических векторов; BACK - обращение матриц; CRON - обобщенное кронекеровское произведение матриц; DET - вычисление определителей; MUL - умножение матриц; RANDOM - генерация псевдослучайных матриц; GEN - генерация степенных операций; MEMORY - подсчет информационной емкости матрицы; SPECTR1 - минимизация информационной энтропии полинома; SPECTR2 - минимизация вычислительной сложности полинома. Использование комплекса программ основано на методике синтеза полиномиальных форм (гл. 4).

Описывается язык логического программирования LOGIC, позволяющий связать два подхода к синтезу форм: символьный, основанный на тождественных преобразованиях формул и матричный, основанный на дискретном ортогональном преобразовании. Преобразование формульного представления в табличное осуществляется путем компиляции описания системы функций на языке LOGIC в интерпретируемый код, выполнение которого для всевозможных значений независимых переменных дает требуемые характеристические вектора.

На крупноблочном уровне основными задачами являются: представление системы функций в табличной форме; выбор типа аналитической конструкции с учетом функциональных возможностей вычислительного средства; синтез полиномиальной формы и ее минимизация; реализация получен-ного полинома в виде вычислительной процедуры.

При программной реализации кратных вычислений использованы следующие принципы: виртуализация вычислительного средства путем использования абстрактного типа данных - целых чисел с управляемой разрядностью представления; отражение полиномиальной формы в структуру вычислительного средства; минимизация вычислительной сложности и информационной энтропии путем подбора степенных операций; оптимизация аналитической конструкции путем использования смешанной значности; обеспечение инвариантности формы при изменении кратности.

Реализация перечисленных принципов осуществлена на разных этапах проектирования. Виртуализация вычислительного средства осуществлена на этапе проектирования стандартного программного обеспечения; отражение формы в структуру вычислительного средства и ее инвариантность при изменении кратности реализованы на этапе создания библиотеки классов, а синтез и минимизация осуществляются на этапе проектирования прикладной программы.

Программные средства кратных вычислений представлены в виде библиотеки классов (рис. 3).

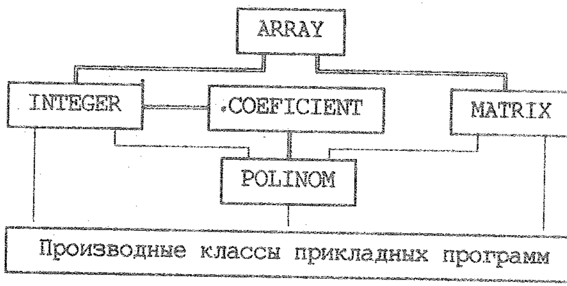


Рис. 3. Иерархия классов для кратных вычислений

Основу иерархии составляет класс ARRAY, обеспечивающии работу с динамически выделяемыми областями оперативной памяти. Класс INTEGER реализует целые числа с управляемой разрядность представления, а класса MATRIX – целочисленные матрицы с переменной размерностью. Завершает иерархию класс POLINOM, выполняющий кратные вычисления. Класс COEFICIENT является базовым для класса POLINOM и реализует однонаправленный список объектов INTEGER. Двойной линией показаны связи между базовыми и производными классами, а одинарной – связь между взаимодействующими классами.

Рассмотрена реализация кратных вычислений на мелкоблочном уровне в мультипликативной форме. Приведена структура логического процессорного элемента при последовательном вычислении полинома (рис. 4), включающая накапливающий сумматор ($\sum$, RG), блок определения степенных операщий P, блок коэффициентов A, блок возведения в степень X^I, мультипликатор MUL, мультиплексор MUX и блок номеров коэффициентов I. Разрядности данных имеют следующие значения:

$$r_j =]\log_2 k_j[, \quad r = \sum_{j=0}^{n-1} r_j, \quad g_t =]\log_2 k_{f_t}[, \quad g = \sum_{t=0}^{q-1} g_t,$$

где r_j (k_j) – разрядность (значность) j-ой переменной, g_t (k_{f_t}) – разрядность (значность) t-ой функции, r (g) – разрядность входных (выходных) данных. Здесь]x[обозначает наименьшее целое, большее или равное x.

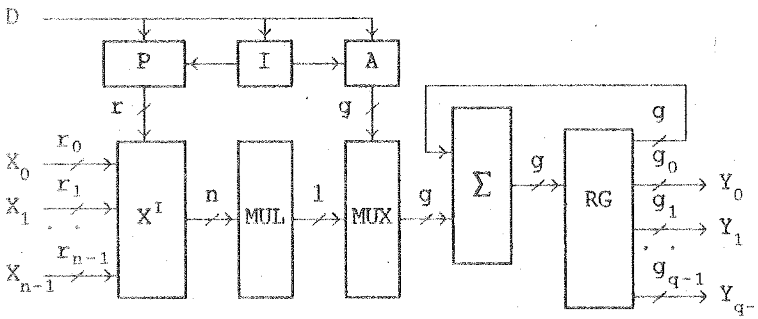


Рис. 4. Последовательное вычисление полинома

В каждом такте блок I выдает номер текущего коэффициента, который используется блоком P и X^I для возведения входных переменных в соответствующие степени, а блоком A – для выборки требуемого (очередного) коэффициента. На выход блока MUX подается коэффициент из блока A только при неравенстве нулю результата вычисления в блоке MUL, на вход которого подаются значения степеней входных переменных. Блоки памяти P и A организованы в виде очереди, что позволяет параллельно с обработкой загружать по шине D очередные значения. Пропускноая способность шины H должна удовлетворять условию:

$$H \geq H_p + (n+1) \sum_{j=0}^{n-1} \log_2 k_j .$$

При отказе от параллельной подгрузки данных получаются минимизированные конструкции блоков P и A для жестко заданной системы функций. Сложность блоков P, I и A в этом случае эквивалентна объему памяти (в битах):

$$M_P=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\log_2 k_j\right)^2,\quad M_I=s\sum_{j=0}^{n-1}\log_2 k_j,\quad M_A=I_p.$$

На рис. 5 представлена структура логического процессорного элемента при параллельном вычислении полинома. В отличие от предыдущей структуры здесь отсутствует блок I, вычисление производится за один такт и подгрузка содержимого блоков P и A осуществляется заблаговременно. Расположив между блоками X^I, MUL и MUX буферные регистры получают процессорный элемент для конвейерной обработки с комплексной эффективностью $\vartheta\approx 4$.

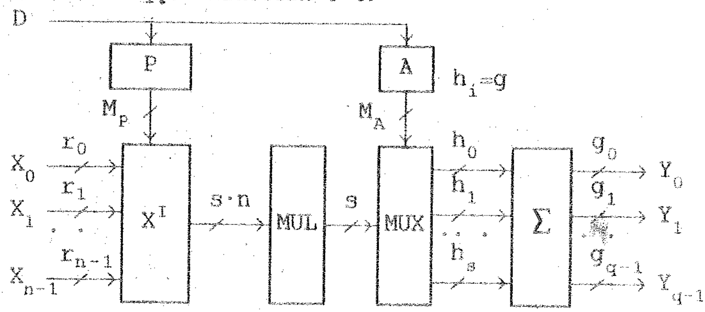


Рис. 5. Параллельное вычисление полинома

Для пространственного распараллеливания вычислений устройства на рис. 4 и рис. 5 дублируют. Если блоки P, I и A сделать общими для всех каналов, то распараллеливание осуществляется во времени и комплексная эффективность больше единицы (аппаратные затраты растут медленнее кратности). Для структуры на рис. 5 реализовано совмещение двух методов кратных вычислений: параллельного во времени и последовательного в пространстве, что обеспечивает комплексную эффективность, равную произведению эффективностей каждого из методов.

На среднеблочном уровне реализация кратных вычислений осуществляется в рамках архитектурных принципов построения процессоров. В состав процессора вводится несколько операционных устройств, в том числе и требующих более одного такта для обработки данных. Занятость устройства, разделяемого между процессами или командами вызывает контекстное переключение процессора. Каждое разделяемое устройство, в том числе и участвующее в образовании мультиплексного конвейера или/и построенное по конвейерному принципу, по завершении обработки вызывает контекстное переключение на процесс, ожидающий результат. При этом у компилятора появляется возможность генерации кода параллельных вычислений как на уровне процессов, так и на уровне команд. Для увеличения быстродействия путем параллельной в пространстве обработки данных предлагается использование нескольких однотипных операционных устройств. Если при этом дублировании существуют общие блоки, то реализуются параллельные во времени кратные вычисления.

В заключении подводится итог выполненных исследований и делаются выводы по работе в целом.

1. Разработаны теоретические основы кратных вычислений и, в частности, установлено: основными методами структурной организации кратных вычислений является последовательные во времени, параллельные в пространстве, последовательные в пространстве и параллельные во времени кратные вычисления; кратные вычисления описываются в полиномиальной форме и реализуются путем вычисления полинома в базисе поразрядных операций; путем выбора весовой функции можно синтезировать форму для вычислений с произвольной кратностью.

2. Проанализирована эффективность кратных вычислений и найдено: для оценки эффективности необходимо использование абсолютных и относительных критериев эффективности: по времени вычисления, по сложности вычислений и комплексной; абсолютная комплексная эффективность не зависит от кратности, а ее повышение возможно как путем увеличения разрядности АЛУ, так и при уменьшении энтропии полинома; синтез форм представления может быть осуществлен в расширенной базисе операций и при смешанной значности переменных и функций.

3. Разработаны принципы реализации кратных вычислений

и показано: эффективная реализация кратных вычислений возможна на трех уровнях вычислительных средств: программном, командном и операционном; на программном уровне кратные вычисления позволяют интенсифицировать использование вычислительных средств, а на командном и операционном уровне совмещение методов структурной организации кратных вычислений обеспечивает наибольшую эффективность.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Выхованец В.С., Гордиенко К.П. Процессор с сокращенным набором команд // Вестник Приднестровского университета. Тирасполь, 1994. № 1. С. 124–128;

2. Выхованец В.С. Многократные параллельные логические вычисления // Информационно-управляющие системы и специализированные вычислительные устройства для обработки и передачи данных: Труды Всероссийской конференции. Махачкала, 1996. С. 105–106;

3. Выхованец В.С. Кратные логические вычисления и их применение в управлении, обработке информации и других областях / Приднестровский государственно-корпоративный университет им. Т.Г. Шевченко. Тирасполь, 1997. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 5.6.97, № 1851-В97;

4. Выхованец В.С. Дискретное преобразование Фурье и его применение при логических вычислениях / Приднестровский государственно-корпоративный университет им. Т.Г. Шевченко. Тирасполь, 1997. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 5.6.97, № 1852-В97;

5. Выхованец В.С. Многократные параллельные логические вычисления // Вестник Приднестровского университета. 1997. № 2. С. 64–74;

6. Малюгин В.Д., Выхованец В.С. Кратные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. 1998. № 4.

Личный вклад. Все научные результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В работы, выполненные в соавторстве, внесен следующий вклад: в [1] – предложен способ взаимодействия операционных устройств; в [6] – арифметико-логическая форма представления кратных вычислений.

Зак. 11. Тир. 100 ИПУ