ВЫВОДЫ

Исходя из выше изложенного, следует, что в процессе обработки больших массивов информации возникает масса проблем по защите и восстановлению данных как таковых вне зависимости их от обрабатывающей программы. Эти вопросы изучены недостаточно, так как профессиональных программистов больше интересует "поведение" программ, а пользователи, больше интересующиеся самими данными, не занимаются решением подобных вопросов. Практическая реализация приведенных алгоритмов восстановления данных призвана облегчить участь пользователей, по неосторожности или недостатку опыта потерявших ценную информацию.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Минаев А.В.* Восстановление поврежденных файлов баз данных FoxPro LAN //"Компьютеры+Программы" 1(9) 1994 г. - С. 34-35.
2. *Нортон Питер, Джордейн Роберт*. Работа с жестким диском IBM/PC. - М.:Мир,1992 - 560 с.

Надійшла 18.01.99
Після доробки 09.09.99

УДК 519.714+681.3

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

В. С. Выхованец

Показано, что обработка многозначных данных может быть реализована путем вычисления логической функции, представленной в обобщенной полиномиальной форме. Изложена обобщенная методика синтеза полиномиальных форм, осуществляемая в расширенном базисе операций и при смешанной значности переменных. Предлагается использование мультипликативных форм, позволяющих повысить эффективность логических вычислений на вычислительных средствах с двоичным кодированием данных.

There is shown in the article that multivalued data manipulation can be realized by calculation logic function represented as generalized polynomial. Generalized procedure of polynomial forms syntheses, which is realized both in the operation extended basis and with compounded significance of variables. Usage of the multiplicative shapes which permit to increase effectiveness of logical evaluations on computational tools with binary data coding is offered.

1 ВВЕДЕНИЕ

Имеется круг задач, решение которых основывается на обработке бинарных и многозначных данных. К таким задачам можно отнести логическое управление, дискретную оптимизацию, обработку сигналов и изображений, распознавание образов и прогнозирование, принятие решений, моделирование дискретных устройств и т.д. Логическая обработка может быть формализована в алгебре логики и представлена в виде логической функции со значностью k_f, зависящей от n аргументов $X=\{X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0\}$, значности которых, в общем случае, различны и равны, соответственно, $K=\{k_{n-1}, \ldots, k_1, k_0\}$:

$$f(X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0) \in \{0, 1, \ldots, k_f - 1\},$$
$$X_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}. \qquad (1)$$

Современное состояние информационной технологии отражает неадекватность используемых методов обработки данных структуре вычислительных средств. Наименее изученными остаются вопросы, связанные с расширением форм представления логических данных с учетом операционных возможностей вычислительного устройства. Наблюдается закономерный интерес к разработке новых форм представления логических данных. В последнее время находит все большее применение метод расширения форм, основанный на преобразовании Фурье в дискретных базисах [1, 2]. Практический интерес представляют полиномиальные формы, которые имеют однородную алгебраическую структуру и хорошо реализуются средствами современной микроэлектроники. Основываясь на ранее полученных результатах [3], приведем обобщенную методику синтеза полиномиальных форм.

2 МЕТОДИКА СИНТЕЗА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФОРМ

Известные методы логических вычислений своей структурой повторяют формульное описание функции. Не ограничивая общности, произвольную функцию (1) представим в обобщенной полиномиальной форме:

$$p(X) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i\left(c_i \delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-1} \ldots \delta_0 X_0^{i_0}\right) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \theta_i(X), \qquad (2)$$

где $k = k_{n-1} \times \ldots \times k_1 \times k_0$; a_i - коэффициенты формы; c_i - произвольные константы; δ_t - логические операции; $X_i^{i_t}$ - переменная X_i в логической степени i_t; $i = (i_{n-1} \ldots i_0)_K$ - представление числа i по смешанному основанию K; $\theta_i(X)$ - полиномиальные ортогональные функции. Для синтеза полиномиальных форм используем дискретное ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} A = D \times F; \\ F = D^{-1} \times A, \end{cases} \qquad (3)$$

где F - характеристический вектор функции, A - вектор коэффициентов формы, D и D^{-1} - матрицы прямого и обратного преобразования размерности $k^n \times k^n$. Последние получаем следующим образом.

1) Задаем ядро преобразования (3), которое определяет степенные операции и соответствующие им матрицы W_t с элементами:

$$w_t(i,j) = i^j,\ (i,\ j = \overline{0, k-1},\ t = \overline{0, n-2}), \qquad (4)$$

где $i\,(j)$ - номер строки (столбца). Строки (столбцы) матрицы W_t должны быть линейно независимы.

2) Строим матрицу D^{-1} по рекуррентному правилу:

$$G_0 = W_0;\ G_{t+1} = W_t \otimes_t G_t,\ (t = \overline{0, n-2});$$
$$D^{-1} = C\delta_n G_{n-1}, \qquad (5)$$

где $\otimes_t$ - обобщенная операция кронекеровского произведения; C - матрица констант, состоящая из k одинаковых строк k произвольных констант. Логические операции δ_t, как и ядро преобразования W_t зададим в виде матриц Δ_t с элементами

$$\delta_t(i,j) = i\delta_t j,\ (i,\ j = \overline{0, k-1},\ t = \overline{0, n}), \qquad (6)$$

а операцию обобщенного кронекеровского произведения определим так:

$$W_t \otimes_t G_t = w_t(i,j)\delta_t G_t,\ (i,\ j = \overline{0, k-1}). \qquad (7)$$

В результате вычисления (7) получаем матрицу, состоящую из $k \times k$ подматриц G_t, каждая из которых поэлементно преобразована операцией δ_t, первым операндом которой является соответствующий элемент матрицы W_t. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости строк (столбцов) G_t, а константы c_i задаем так, чтобы определитель D^{-1} был отличен от нуля.

3) Матрицу D вычисляем из условия ортогональности: $D \times D^{-1} = E$, где E - единичная матрица размерности $k^n \times k^n$. Обращение матриц и проверку линейной зависимости строк осуществляем в поле операций сложения и умножения, используемых при формировании обобщенной полиномиальной формы (2).

Пример. Представим в полиномиальной форме функцию, заданную таблицей истинности:

X_1	X_0	$f(X_1, X_0)$
0	0	2
0	1	1
1	0	3
1	1	3
2	0	0
2	1	1

Из таблицы видно, функция имеет значность $k_f = 4$, а переменные - значности $K = \{3, 2\}$. В соответствии с (2) искомая полиномиальная форма будет иметь вид:

$$p(X) = \sum_{i=0}^{3 \times 2 - 1} a_i \left(c_i \delta_1 X_1^{i_1} \delta_0 X_0^{i_0} \right) (mod 4),$$

где $x\delta_0 y$ определим в соответствии с (6) как сдвиг двоичного представления x вправо на y разрядов, а степенные операции в соответствии с (4) зададим как побитовые операции неэквиваленции и дизъюнкции:

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с выражениями (5) и (7), найдем матрицу G_1:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

определитель которой по модулю $k_f = 4$ равен нулю, в связи с чем зададим операцию $x\delta_1 y$ как $max(x, y)$ и выберем вектор коэффициентов $C = [3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$; это обеспечит обращаемость матрицы D^{-1} в поле арифметических операций, выполняемых по модулю 4:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_1 G_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

обратив матрицу D^{-1} и умножив ее на характеристический вектор F (столбец таблицы истинности) получаем вектор коэффициентов A:

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; A = D \times F = D \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

по которому конструируем искомую полиномиальную форму:

$$p(X) = 2(X_1^0 \delta_0 X_0^1) + (X_1^2 \delta_0 X_0^0) = 2(X_0 \delta_0 X_0^1) + (X_1^2 \delta_0 X_0),$$

где учтено, что $X_1^0 = X_1$ и $X_0^0 = X_0$. На языке программирования С вычисление функции будет иметь вид:

$$f = ((x1 \gg !x0) \ll 1) + ((x1|2) \gg x0).$$

3 ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФОРМ

Задача конструирования формы (2) сводится к разложению некоторой логической функции $f(X)$ в ряд по заданным ортогональным функциям $\theta(X)$ путем вычисления спектра A вектора логических данных F. При этом значения функции $f(X)$ и значения арифметико-логической формы $p(X)$ совпадают во всех k точках области определения.

Разнообразие форм $p(X)$ для одной и той же функции $f(X)$ определяется возможностью получения различных полных систем ортогональных функций $\{\theta(X)\}$. По соотношению (2) синтезируются логические и арифметические формы. При синтезе логических форм суммирование выполняется по модулю k, где k - простое число, а операция арифметического умножения заменяется на некоторую логическую операцию. При синтезе арифметических форм используются операции арифметического сложения и умножения, в связи с чем снимаются ограничения на значение k.

С целью повышения эффективности вычислений на выбор базиса наложим дополнительные ограничения, которые возможны по причине определенной произвольности в выборе матриц ядра W_t, операций δ_t и логических констант c_i. Среди таких ограничений - возможность факторизации базиса, т.е. представления матриц прямого (обратного) преобразования в виде произведения слабозаполненных матриц, что позволяет построить быстрый алгоритм дискретного преобразования. Иногда важным является уменьшение сложности формирования базиса, поскольку это отражается на программных и аппаратных средствах. Варьируя базис при неизменных входных данных, можно получить множество спектров, некоторые из которых являются более предпочтительными по условию решаемой задачи или содержат много нулевых компонентов. В последнем случае решается задача минимизации функции в заданном классе операций. Можно также ввести ограничения на выбор базиса, связанные с минимизацией коэффициентов формы, что приводит к уменьшению памяти, необходимой для их хранения, или включить в множество операций те операции, которые реализуются на используемом вычислительном средстве с наибольшей эффективностью.

На практике получили развитие и имеют широкое распространение методы вычисления с помощью арифметических полиномов в булевой алгебре [4, 5]. Выражение (2) дает возможность свести вычисления в многозначной логике к вычислению арифметико-логического полинома в булевой алгебре путем соответствующего выбора степенных функций. В этом случае ядро дискретного преобразования задается в виде булевых матриц, а логические вычисления сводятся к выполнению логических операций над совокупностью промежуточных булевых переменных, полученных в результате возведения в степень исходных переменных.

4 МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФОРМЫ

Формирование базиса дискретного ортогонального преобразования сопряжено со значительными вычислительными трудностями, которые связаны с необходимостью обращения матриц большой размерности. В связи с чем на практике в качестве логических операций используется некоторая мультипликативная операция, совпадающая по определению с операцией арифметического умножения: в булевой алгебре такой операцией является конъюнкция, в многозначной логике - обычное арифметическое умножение.

Использование мультипликативных операций позволяет значительно упростить формирование базиса дискретного преобразования. Это связано с интересным свойством операции кронекеровского произведения матриц относительно арифметического умножения: для произвольных матриц: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых существуют обратные: $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_n^{-1}$, справедливо выражение:

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_n)^{-1} = A_1^{-1} \otimes A_2^{-1} \otimes \ldots \otimes A_n^{-1},$$

т.е. обращение кронекеровского произведения матриц может быть получено путем кронекеровского произведения обратных матриц. В этом случае соотношения для формирования базиса (5) могут быть представлены в следующем виде:

$$D_0^{-1} = W_0, \; D_{t+1}^{-1} = W_t \otimes D_t^{-1};$$

$$D_0 = W_0^{-1}, \; D_{t+1} = W_t^{-1} \otimes D_t.$$

4.1 БУЛЕВА МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФОРМА

Представление логических функций в булевом мультипликативном базисе основано на использовании в качестве логических операций булевой конъюнкции &, совпадающей с операцией арифметического умножения на множестве $B = \{0, 1\}$. Для согласования области определения булевой конъюнкции с областями значений степенных операций, последние необходимо задавать в виде булевых матриц, т.е. матриц, элементы которых принимают значения в B, т.е. $w(i, j) \in B$.

Использование булевой мультипликативной формы позволяет эффективно реализовать вычисления в многозначной логике на вычислительных средствах, использующих двоичное кодирование данных. При реализации полинома (2) операция арифметического умножения не выполняется, а вычисление сводится к суммированию коэффициентов, для которых логическая часть выражения не равна нулю. Минимизация булевой мультипликативной формы выполняется путем подбора степенных операций для каждой из переменных. Количество обращаемых булевых матриц $N_B(k)$ размерности $k \times k$ может быть подсчитано по формуле:

$$N_B(k) = k!\left(2^{\frac{k(k-1)}{2}+1} - 1\right),$$

где $k!$ - факториал числа k.

4.2 МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФОРМА УОЛША

Определим в мультипликативном базисе степенные операции в виде матриц, состоящих из элементов множества $\{1, -1\}$. В результате получим форму, заданную относительно операции арифметического умножения и являющуюся своеобразным расширением полиномиальной формы Уолша. В этом случае вычисление полинома (2) сводится к подсчету $b_i(X)$ - количества отрицательных значений степенных операций для каждого числа i на заданном наборе данных X и суммированию коэффициентов со знаками, равными знакам выражений $(-1)^{b_i(X)}$.

Минимизация мультипликативной формы Уолша осуществляется путем подбора степенных операций для каждой из переменных. Количество обращаемых матриц Уолша $N_w(k)$ размерности $k \times k$, полученные в результате вычислительного эксперимента, представлено в таблице (там же для сравнения приведены значения для $N_B(k)$):

Таблица

k	**2**	**3**	**4**
$N_w(k)$	8	192	22272
$N_B(k)$	6	90	3048

Из таблицы видно, что возможности минимизации логической функции в мультипликативной форме Уолша превосходят аналогичные возможности в булевой форме. Для уменьшения времени вычисления логической части полинома определим степенные операции по аналогии с полиномиальной формой Уолша в булевой алгебре:

$$X_i^j = (-1)^{(X_i \times j)_{mod\ k}},$$

откуда находим, что форма (2) существует только при $k \in \{2, 3\}$, что вызвано линейной зависимостью строк матриц ядра. При $k = 2$ получаем классический базис Уолша. Задавая степенные операции как

$$X_i^j = (-1)^{(X_i + j)_{mod\ k}},$$

где k - простое число, получаем аналитическую конструкцию, существующую при всех k и в которой мультипликативная операция заменяется на операцию сложения:

$$p(X) = \sum_{(i)} a_i (-1)^{\theta(X)},\ \theta(X) = \sum_{j=0}^{n-1} (X_j + i_j)_{mod\ k}. \qquad (8)$$

К достоинствам формы (8) можно отнести регулярность структуры аналитической конструкции и малое время вычисления, которое незначительно превосходит время вычисления булевой мультипликативной формы. Матрицы ядра дискретного ортогонального преобразования размерности $k \times k$ имеют вид:

$$W_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & . & 1 \\ -1 & 1 & -1 & . & 1 & . \\ 1 & -1 & . & 1 & . & 1 \\ -1 & . & 1 & . & 1 & -1 \\ . & 1 & . & 1 & -1 & 1 \\ 1 & . & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ W_t^{-1} = \frac{1}{2^{k-2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 \\ 0 & . & 0 & 1 & 1 & 0 \\ . & 0 & 1 & 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3 ОБОБЩЕННАЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФОРМА

Использование значений степенных операций из множества $\{-1, 0, 1\}$ позволяет обобщить формы представления логических функций в мультипликативных базисах. Разложение произвольной функции в этом случае производится по трехуровневым ортогональным функциям. Количество степенных операций для обобщенной мультипликативной формы значительно превосходит количество степенных операций для мультипликативной формы Уолша и булевой мультипликативной формы. Понятно, что матрицами степенных операций для обобщенной мультипликативной формы могут быть все $N_B(k)$ булевы матрицы и все $N_w(k)$ матрицы Уолша, а также все обращаемые матрицы, получаемые заменой произвольного числа единиц в матрицах Уолша на ноль. Это определяет широкие возможности минимизации в классе обобщенных мультипликативных форм.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. *Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Янушкевич С.Н.* Новые возможности дискретного преобразования Фурье для аналитического описания бинарных и многозначных данных // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / ВЦ АН СССР. - М: Наука, 1991. - Вып. 3. - С. 112-147.
2. *Малюгин В.Д.* Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов. - М.: Наука, 1997.
3. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Кратные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. - 1998. - № 6. - С. 163-171.
4. *Антоненко В.М., Иванов А.А., Шмерко В.П.* Линейные арифметические формы k-значных логик и их реализация на систолических массивах // Автоматика и телемеханика. - 1995. - № 4. - С. 139-155.
5. *Малюгин В.Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. - 1984. - № 2. - С. 114-122.

Надійшла 29.03.99

УДК 519.21

ПРИВЕДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ К ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ПРИ ПОМОЩИ ВОЗМУЩЕНИЯ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

С. Н. Герасин

Сформулированы и доказаны условия, при которых неоднородная марковская система может быть приведена к заранее заданному распределению за сколь угодно малое время. Отдельно рассмотрен случай, когда вероятности состояний могут быть приведены в малую окрестность фиксированного распределения. Приведены иллюстративные примеры.[1]

Сформульовані та доведені умови, при яких неоднорідна марківська система може бути приведена до розподілу, який був заданий раніше за скіль завгодно малий проміжок часу. Окремо розглядається ситуація, коли ймовірності станів мають бути приведені у малий окіл фіксованого розподілу. Наведені ілюстративні приклади.

Forms are given and the conditions are approved under which non-homogeneous Markov system may be reduced to the earlier given distribution during any short time. A separate case is considered, when state probabilities may be reduced to a small vicinity of the fixed distribution. The illustrated examples are given.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является получение условий, при которых неоднородная марковская система, описываемая системой уравнений Колмогорова, будет иметь в точке t_0 заранее заданное предельное распределение. Найдем условия сходимости вероятностей состояний неоднородного марковского процесса с конечным числом состояний и непрерывным временем к предельным вероятностям.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть поведение неоднородной марковской системы может быть описано системой Колмогорова вида

$$P'(s) = P(s)\Lambda(s)\,, \tag{1}$$

где $P(s) = (P_1(s), P_2(s), \ldots, P_n(s))$ - вектор вероятностей состояний процесса, а $\Lambda(s)$ - матрица интенсивностей перехода из состояния в состояние. Матрица $\Lambda(s)$ имеет ранг $n-1$, а ее элементы удовлетворяют следующим свойствам $\lambda_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 0$ [1].

Рассматриваемая ниже теорема тесно связана со следующим предположением об инфинитезимальной матрице $\Lambda(s)$ исследуемого процесса: $\Lambda(s)$ непрерывна в некоторой левой полуокрестности Ω точки t_0 и существует такой ее столбец j_0, что все его элементы удовлетворяют условию

1. Даная публикация поддержана грантом Международного Научного Фонда № YSU 081014