Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М., 2003. С. 79-81.

Аппаратная и программная реализация мультипликативных форм

Выхованец В.С., Малюгин В.Д.

Институт проблем управления РАН

В работе [1] дана классификация алгебраических систем, используемых при алгебраической декомпозиции дискретных функций, куда включены алгебра логики, мультипликативная и аддитивная алгебры, конечное поле и целостное кольцо. Прикладные вопросы синтеза мультипликативных форм рассмотрены в [2], а применению мультипликативной алгебры при логической обработке данных посвящена работа [3].

Мультипликативной алгеброй называется алгебраическая система $\boldsymbol{R} = <\boldsymbol{N_k}, +, \times>$, заданная на конечном множестве $\boldsymbol{N_k}$ из $\boldsymbol{k}$ элементов и образованная двумя операциями, удовлетворяющими следующим условиям: сложение имеет нейтральный элемент $\boldsymbol{\sigma}$ такой, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma}$; умножение имеет левую обратную операцию, т.е. уравнения вида $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет единственное решение для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\sigma}$.

Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М., 2003. С. 79-81.

Произвольная дискретная функция $\boldsymbol{f}$, зависящая от $\boldsymbol{n}$ переменных $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_1}$,…, $\boldsymbol{x_{n-1}}$ со значностями $\boldsymbol{k_0}$, $\boldsymbol{k_1}$,…, $\boldsymbol{k_{n-1}}$, представляется в мультипликативной алгебре в виде выражения:

$$\boldsymbol{f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{k_0 k_1 ... k_{t-1}-1} d_i(x_0, x_1, ..., x_{t-1}) \times a_i(x_t, x_{t+1}, ..., x_{n-1})}$$

где $\boldsymbol{d_i}$ – многозначные унимодальные функции от $\boldsymbol{t}$ переменных, $\boldsymbol{a_i}$ – коэффициенты разложения (функции, зависящие от оставшихся $\boldsymbol{n-t}$ переменных). При $\boldsymbol{t=n}$ получаем спектральное разложение, у которого коэффициенты – константы. Если $\boldsymbol{t<n}$, то представление называется решающим (decision).

Представление функции записывается также в матричной форме: $\boldsymbol{F = D \times A}$, где $\boldsymbol{F}$ – матрица функции размерности $\boldsymbol{(k_0 k_1 ... k_{t-1}) \times (k_t k_{t+1} ... k_{n-1})}$, $\boldsymbol{D}$ – квадратная матрица дискретного преобразования размерности $\boldsymbol{k_0 k_1 ... k_{t-1}}$, $\boldsymbol{A}$ – соответствующая матрица коэффициентов.

Для представления произвольной дискретной функции в мультипликативной форме необходимо и достаточно, чтобы матрица прямого преобразования $\boldsymbol{D}$ была мономиальной. Синтез формы сводится к нахождению матрицы

Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М., 2003. С. 79-81.

коэффициентов. Для существования обратного преобразования на алгебру накладываются дополнительные требования, а именно, на операцию умножения, которая теперь должна образовывать группу $\boldsymbol{G} = <\boldsymbol{N_k} \setminus \{\boldsymbol{\sigma}\}, \times>$. Такая алгебра называется непримитивной. Тогда существует матрица обратного преобразования $\boldsymbol{Q}$, такая, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{Q} = \widetilde{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}}$, а $\widetilde{\boldsymbol{D}}$ получается из $\boldsymbol{D}$ путем замены ненулевых элементов на обратные в группе $\boldsymbol{G}$.

При программной реализации многозначные унимодальные функции вычисляются с использованием операций сравнения и условного перехода. Для обеспечения возможности выбора нуля алгебры, сложение реализуется командой поразрядной суммы по модулю 2 следующим образом: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{\sigma}$. Операция умножения строится на основе команды арифметического сложения путем его усечения, то есть установки результата умножения в $\boldsymbol{\sigma}$, когда первый операнд равен $\boldsymbol{\sigma}$. При этом используются команды сравнения, сложения и условного перехода. Умножение непримитивной алгебры также строится на основе арифметического сложения путем усечения по двум операндам и смещения результата на 1.

При аппаратной реализация мультипликативных форм используются такие элементы как логический компаратор и конъюнктор (для реализации унимодальных функций), дизъюнктор или сумматор по модулю 2 (для объединения результатов вычисления) и сумматор (для реализации умножения).

Мультипликативная форма позволяет по виду функции определить эффективность ее представления и управлять значениями коэффициентов. Это также повышает эффективность логической обработки данных.

Список литературы

1. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

2. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Мультипликативные формы и их применение при логических вычислениях // Тезисы докладов 2 Международной конференции по проблемам управления. 2003. Т. 2. С. 110-111.

3. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Мультипликативная алгебра и ее применение в логической обработке данных // Труды конференции «Теория и практика логического управления», посвященной памяти М.А. Гаврилова. 2003.