Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М, 2003. С. 81-84.

Алгебраическая декомпозиция дискретных функций в аддитивной алгебре

Выхованец В.С.

Институт проблем управления РАН

Под алгебраической декомпозицией понимается представление дискретной функции, зависящей от $\boldsymbol{n}$ переменных $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}\}$ со значностями $\boldsymbol{K}=\{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_{n-1}\}$ в виде выражения

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\sum_{i=0}^{k'_0k'_1\ldots k'_{t-1}-1}\boldsymbol{d}_i(\boldsymbol{X}')\times\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{X}''),$$

где $\boldsymbol{d}_i$ – спектральные функции, $\boldsymbol{a}_i$ – коэффициенты разложения, $\boldsymbol{X}'=\{\boldsymbol{x}'_0,\boldsymbol{x}'_1,\ldots,\boldsymbol{x}'_{t-1}\}$, $\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{X}'$. Или в матричной форме: $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{F}$ – матрица функции размерности $(\boldsymbol{k}'_0\boldsymbol{k}'_1\ldots\boldsymbol{k}'_{t-1})\times(\boldsymbol{k}'_t\boldsymbol{k}'_{t+1}\ldots\boldsymbol{k}'_{n-1})$, $\boldsymbol{D}$ – квадратная матрица дискретного преобразования размерности $\boldsymbol{k}'_0\boldsymbol{k}'_1\ldots\boldsymbol{k}'_{t-1}$, $\boldsymbol{A}$ – соответствующая матрица коэффициентов. При $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}$ получаем спектральное разложение, у которого коэффициенты – константы.

В [1] определены алгебраические системы, которые могут использоваться при алгебраической декомпозиции: алгебра

Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М, 2003. С. 81-84.

логики, мультипликативная и аддитивная алгебры, конечное поле и целостное кольцо. Алгебраическая декомпозиция в мультипликативной алгебре подробно рассмотрена в [2].

Аддитивной алгеброй называется алгебраическая система $\boldsymbol{R} = < \boldsymbol{N_k}, +, \times >$, заданная на множестве $\boldsymbol{N_k}$ из $\boldsymbol{k}$ элементов, где сложение образует коммутативную группу $\boldsymbol{G} = < \boldsymbol{N_k}, + >$, умножение имеет левый нейтральный элемент $\boldsymbol{\tau}$ (единицу), а для нейтрального элемента по сложению $\boldsymbol{\sigma}$ (нуля) справедливо $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma}$ для любых $\boldsymbol{a}$.

Для алгебраической декомпозиции в аддитивной алгебре необходимо и достаточно, чтобы матрица прямого преобразования $\boldsymbol{D}$ была логической (состояла из нулей и единиц) и имела определить, по модулю меньший циклического порядка $\boldsymbol{G}$. Столбцы матрицы $\boldsymbol{D}$ являются характеристическими векторами двузначных мультимодальных функций.

Синтез аддитивной формы функции сводится к нахождению матрицы коэффициентов из уравнения $\Delta \circ \boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}} \circ \boldsymbol{F}$, где Δ – определить $\boldsymbol{D}$, $\circ$ - операция циклической суммы ($\boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \ldots + \boldsymbol{a}$), $\overline{\boldsymbol{D}}$ - матрица алгебраических дополнений $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{T}$ - операция транспонирования.

Минимизация формы осуществляется на каждом шаге декомпозиции путем поиска такого разделения переменных,

Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М, 2003. С. 81-84.

при котором число спектральных функций, участвующих в разложении, будет минимальным. Декомпозиция эффективна, если это число не превосходит $\log_2 k$. Последнее равносильно поиску такого разделения переменных, при котором прямоугольная таблица функции, порождаемая этим разделением, имеет не более чем $\log_2 k$ неконстантных строк. Следовательно, не любая функция имеет эффективное представление. Однако это имеет место и в других алгебрах.

При программной реализации двузначные мультимодальные функции представляются в виде битовых строк. Вычисление такой функции сводится к определению по значению переменных слова и бита в слове, где записано значение функции. При этом выполняется $3n$ простых команд микропроцессора (чтение памяти, регистровый сдвиг, поразрядная дизъюнкция) – для определения номера бита, и команда целочисленного деления с вычислением остатка – для вычисления слова и бита в слове. Операция сложения аддитивной алгебры реализуется командой арифметического сложения или поразрядного сложения по модулю 2, а операция умножения – структурой программы.

Аппаратная реализация аддитивных форм осуществляется аналогично программной. При этом используются такие

Теория и практика логического управления: Тез. докл. Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР М. А. Гаврилова. М, 2003. С. 81-84.

элементы как запоминающее устройство (для мультимодальных функций) и сумматор по модулю 2 (для объединения результатов вычисления). Умножение реализуется трассировкой данных.

Применение алгебраической декомпозиции в аддитивной алгебре позволяет синтезировать минимальные формы дискретных функций путем поиска разделения переменных, при котором прямоугольная таблица функции содержит наибольшее число константных строк, в противоположность декомпозиции общего вида, когда ищется число классов эквивалентности. Заметим также, что эффективность представления функции в аддитивной форме не зависит от используемого набора мультимодульных функций и определяется заранее, до проведения синтеза.

Список литературы

1. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

2. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Мультипликативная алгебра и ее применение в логической обработке данных // Труды конференции «Теория и практика логического управления», посвященной памяти М.А. Гаврилова. 2003.