Проблемы управления. 2004. № 3. С. 67-77.

УДК 519.712

Мультипликативная алгебра и ее применение в логической обработке данных

В. С. Выхованец, В. Д. Малюгин

Рассматривается проблема синтеза формул для дискретных функций на основе многоступенчатой (решающей) и спектральной декомпозиции, выполняемой в мультипликативной алгебре. Показывается связь синтеза мультипликативных форм с общей задачей синтеза формул. Приводятся практические рекомендации по программной и аппаратной реализации получаемых формул.

1. Введение

Логическая обработка данных широко используется в логическом управлении, цифровой обработке сигналов, распознавании образов, синтезе дискретных устройств, и в других областях. В свою очередь задачи логического управления возникают при использовании дискретных систем управления, которые используют дискретные сигналы и функционируют в дискретном времени (рис. 1).

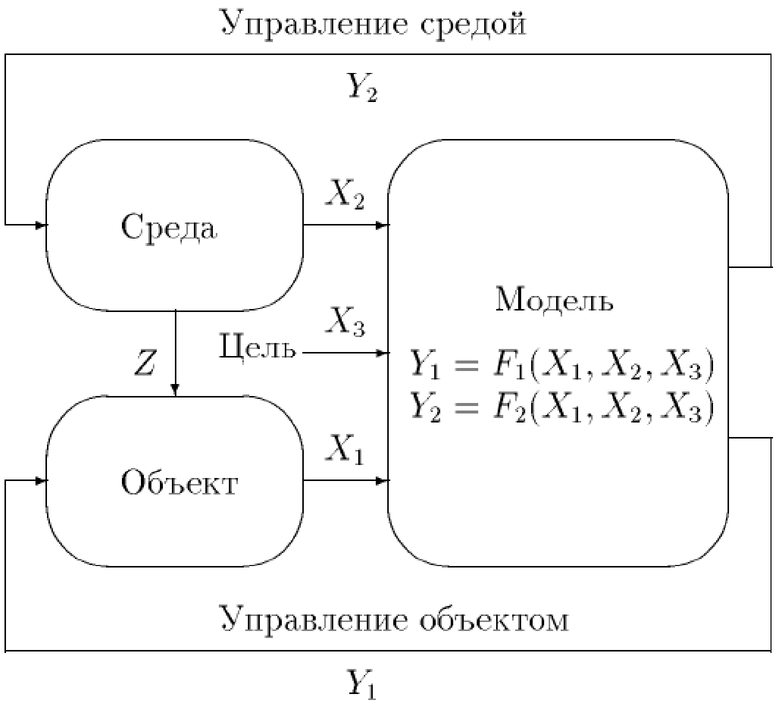

Рис. 1. Логическое управление

Система управления дискретного действия может быть описана совокупностью логических функций (системой функций). В результате представления этих функций в одной из форм их описания, например, в виде выражений в некотором функционально полном базисе операций получают логическую модель объекта (среды), состоящую из отдельных описаний каждой функции.

Данные при логической обработке представляются в виде конечных последовательностей знаков (цифр), взятых из некоторого конечного алфавита N, а сама обработка осуществляется путем преобразования входных данных X в выходные Y посредством разделения X на части (переменные) x_0, …, x_{n-1}, выполнения над ними некоторых последовательностей операций $F = \{f_0, \ldots, f_{s-1}\}$ с целью получения результатов y_0, …, y_{n-1}, из которых потом формируются выходные данные $\boldsymbol{Y}$ (рис. 2).

Основной проблемой логической обработки является декомпозиция дискретной функции или ее представление в виде формулы как некоторой последовательности операций над переменными.

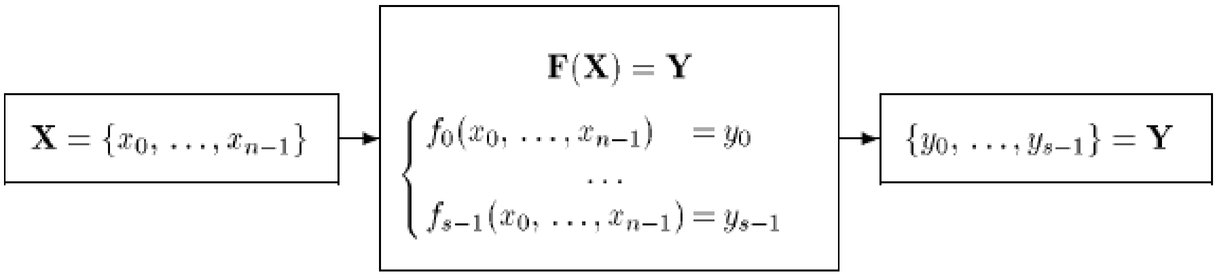

Рис. 2. Логическая обработка данных

Попытки найти декомпозицию функции общего вида (нерегулярную декомпозицию) столкнулись с серьезными трудностями, связанными с предельно общей постановкой задачи, и при больших размерностях – практически нереализуемую [1]. Нерегулярная декомпозиция сводится к NP-полной задаче раскраски графа, для которой не найдено эффективных решений [2]. В связи с чем нерегулярную обработку данных представляют, в основном, в алгоритмических формах. Теоретической базой при этом служат хорошо известные парадигмы анализа предметной области, получившие свою реализацию в одноименных методологиях проектирования программных средств (логической, функциональной, структурной, объектно ориентированной, и др.).

С другой стороны, поиск методов дискретной декомпозиции и дискретной минимизации пошел в направлении исследования регулярных аналитических конструкций, предельным случаем которых являются спектральные разложения. Традиционно первой формой компактного представления логической модели стала индивидуальная минимизация функций, которая заключается поиске минимальных или близких к минимальным форм для каждой функции системы в отдельности. Очевидно, при этом общее количество формул остается неизменным, представления функций упрощаются, но приходится жертвовать единим базисом, так как каждая функция имеет свой в некотором смысле оптимальный набор операций для своего наиболее простого выражения.

Другим методом получения и упрощения логической модели является совместная минимизация функций системы, при которой выделяются некоторые общие подвыражения, участвующие при вычислении двух и более функций. В итоге количество функций системы увеличивается, но при аппаратурной реализации уменьшается требуемое количество логических элементов, а при программной реализации – общее время вычисления модели.

Как для предыдущего, так и для этого метода пока не найдено эффективных алгоритмов, позволяющих за приемлемое время выполнить минимизацию достаточно сложной модели. Как правило, используются переборные алгоритмы, имеющие высокую трудоемкость. Так как индивидуальная и совместная минимизация функций сохраняет их общее количество неизменным, или даже увеличивает, то для повышения эффективности модели ставится задача поиска форм совместного описания функций, например, в виде единого выражения, позволяющего вычислять все функции сразу, не вычисляя каждую в отдельности.

Известно, что произвольная функция может быть представлена со сложностью, не превышающей некоторую максимальную, причем эта максимальная сложность не зависит от используемого базиса. Поэтому целесообразно поставить задачу поиска конечных форм совместного описания всей системы функций, например, в виде единого выражения в некотором общем для всех функций базисе. Хотя сложность этого выражения может быть максимальной, зато будет описываться вся система сразу и функции системы будут вычисляться одновременно (параллельно) при вычислении этого выражения. Это позволяет не только уменьшить объем памяти, необходимый для хранения модели, но и сократить время ее вычисления.

Одной из первых и самой распространенной формой совместного описания системы функций алгебры логики является арифметический полином [3]. Предельным случаем упрощения логической модели является ее представление в виде линейного выражения – суммы переменных, умноженных на некоторые коэффициенты, причем операции сложения и умножения не обязательно должны быть традиционными арифметическими. Ранее показано [4], что за счет увеличения разрядности коэффициентов произвольная система булевых функций может быть представлена в виде композиции двух линейных арифметических полиномов ограниченной сложности. Если даже выражение нелинейное, то специальное увеличение разрядности коэффициентов позволяет реализовать кратные логические вычисления, при которых система функций вычисляется сразу (одновременно, параллельно) на нескольких наборах переменных [5].

Все перечисленные выше методы основаны на спектральной декомпозиции. При спектральной декомпозиции функция разлагается в линейную комбинацию фиксированного множества других функций, называемых спектральными и имеющими такую же длину характеристических векторов, что и исходная. С технической точки зрения такой подход оправдан, когда эффективность реализации спектрального базиса достаточно высока. Однородность спектральных разложений не позволяет гарантировать эффективное формульное представление наперед неизвестной функции. Поэтому развитие спектральных методов связано с уменьшением регулярности синтезируемых формул, в частности, применения многоступенчатой декомпозиции (решающих диаграмм) [6, 7], объединения спектральных составляющих в различных арифметиках [8-11], совместного описания множества функций в виде одного спектра [3], использования новых и расширения имеющихся спектральных базисов [12-18].

Интерес к спектральным методам логики и распараллеливанию логических вычислений вызван появлением особо сложных задач, в которых многочисленные данные связаны логической зависимостью. При этом реализация логических алгоритмов обычно мыслиться как программная. Принятое ныне описание схем и алгоритмов, основанное на языке булевой алгебры, лишь частично соответствует программным и техническим возможностям современных ЭВМ. Заметим, что в англоязычных публикациях структурированное объединение логических выражений называется представлением функций в форме слов (word-level).

Так как в основе описанных подходов лежат способы совместного описания системы логических функций посредством какой-нибудь единой формулы, то появляется надежда, что сведение системы функций к одному выражению упрощает и процедуру проверки устройства, реализующего эту формулу. Иначе говоря, упрощается тестирование, диагностирование устройств и верификация соответствующих программ.

В настоящей работе рассмотрено применение мультипликативной алгебры для многоступенчатой (решающей) и спектральной декомпозиций. В отличие от традиционного подхода, при котором объединение спектральных составляющих осуществляется в таких алгебраических системах как конечное поле или кольцо целых чисел, предлагается использование специальной алгебраической системы – мультипликативной алгебры. Использование мультипликативной алгебры позволяет оценить сложность представления функции заранее, до проведения декомпозиции, снизить трудоемкость синтеза формульного выражения, уменьшить количество операций, необходимых для вычисления (реализации) функции.

2. Определения

В логической обработке используется дискретное кодирование данных. Выберем в качестве универсального множество целых чисел $N_0 = \{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$. Когда необходимо задать конечное множество, будем использовать подмножество $\boldsymbol{N_k}$ этого множества, $N_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$, где $k > 0$ – количество элементов в этом множестве.

2.1. Дискретные функции

Функцией f одной переменной $\boldsymbol{x}$, заданной на множестве X и принимающей значения на множестве Y есть отношение между X и Y, такое, что каждый элемент $x \in X$ связан не более чем с одним элементом $y \in Y$. Множество X называется областью определения функции, множество Y – областью значений. Функцию будем называть дискретной, если ее область определения и область значений – конечные множества.

Пусть функция f задана на множестве $N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}}$ и принимает значения на множестве N_{k_f} (здесь знаком $\times$ обозначено декартово произведение множеств). Это означает, что функция f зависит от n переменных x_0, x_1, …, x_{n-1}, т.е. $y = f(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$, где $y \in N_{k_f}$ и $x_j \in N_{k_j}$ ($j = \overline{0, n-1}$). Будем говорить, что функция имеет значность k_f, а переменные x_j – значности k_j.

Дискретную функцию определим таблицей истинности, содержащей $m = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$ строк, где m – количество элементов области определения (табл. 1). Установим взаимно однозначное соответствие между значением i переменной $x \in N_m$ и значениями i_j переменных $x_j \in N_{k_j}$ с помощью представления числа i в n-разрядной позиционной системе счисления с основаниями, определяемыми значностями переменных,

$$i = (i_{0,} i_1, \ldots, i_{n-1})_{k_0 k_1 \ldots k_{n-1}} \tag{1}$$

где $i_j \in N_{k_j}$ – j-я цифра числа i, представленного в системе счисления с основаниями k_0, k_1, …, k_{n-1}. Будем полагать, что цифра i_0 имеет наименьший вес.

Таблица 1. Таблица истинности функции

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	y
0	0	0	$\cdots$	0	y_0
1	1	0	$\cdots$	0	y_1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$k_0 - 1$	$k_0 - 1$	0	$\cdots$	0	y_{k_0-1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	i_0	i_1	$\cdots$	i_{n-1}	y_i
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$m - 1$	$k_0 - 1$	$k_1 - 1$	$\cdots$	$k_{n-1} - 1$	y_{m-1}

Для прямого и обратного преобразования числа i в его представление (1) будем использовать следующие рекуррентные выражения:

$$k = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}, \qquad \left.\begin{aligned} i_j &= i \operatorname{mod} k, \\ i &= i \operatorname{div} k, \\ k &= k / k_{j-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (j = \overline{n-1, 1}) \tag{2}$$

– для прямого преобразования и

$$k = 1, \ i = 0, \qquad \left.\begin{aligned} i &= i + i_k k, \\ k &= k k_{j-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (j = \overline{0, n-1}) \tag{3}$$

– для обратного, где mod обозначает остаток, а div – целую часть от деления первого операнда на второй.

Вектором будем называть упорядоченное множество элементов, перечисленное в квадратных скобках (для отличия от представления числа в системе счисления (1), где используются круглые скобки). Как и ранее, будем предполагать, что первый элемент вектора имеет наименьшую значимость. Произвольная функция может быть задана вектором значений или характеристическим вектором $\mathbf{F} = [y_0 \ y_1 \ldots y_{m-1}]$ длины m и вектором значностей переменных $\mathbf{K} = [k_0 \ k_1 \ldots k_{n-1}]$ длины n. Если функция задана только вектором $\mathbf{F}$, то существует множество векторов $\mathbf{K}$, которые могут быть использованы для полного определения функции. Количество таких векторов равно количеству представлений числа m в виде произведения целых чисел, больших единицы.

Вектор переменных обозначим как $\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1}]$. Выражение $\mathbf{F}[x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1}]$ равно значению функции, заданной характеристическим вектором, когда переменные принимают значения x_0, x_1, …, x_{n-1}. Возможны также записи вида

$$\mathbf{F}(x),\ \ \mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}),\ \ \mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})_{k_0k_1\ldots k_{n-1}},$$

если переменная x представлена в позиционной системе счисления с известными основаниями $\mathbf{K}$, а (x_0, x_1, …, x_{n-1}) читается как последовательность цифр числа x в этой системе счисления.

Пример 1. Пусть дискретная функция задана характеристическим вектором $\mathbf{F}=[3\,0\,1\,2\,2\,0]$ длины 6. Функция имеет значность $k_f=4$, так как элементы вектора $\mathbf{F}$ принимают значения на множестве из четырех элементов $N_4=\{0,1,2,3\}$. Для вектора $\mathbf{K}$ возможны 3 варианта значностей переменных: $\mathbf{K}_0=\{6\}$, $\mathbf{K}_0=\{3,2\}$ и $\mathbf{K}_0=\{2,3\}$. Все три функции приведены в табл. 2.

Таблица 2. Дискретная функция

$\mathbf{K}_0=[6]$	$\mathbf{K}_1=[3\,2]$		$\mathbf{K}_2=[2\,3]$		$k_f=4$
x	x_0	x_1	x_0	x_1	f
0	0	0	0	0	3
1	1	0	1	0	0
2	2	0	0	1	1
3	0	1	1	1	2
4	1	1	0	2	2
5	2	1	1	2	0

2.2. Дискретные операции

Одна и та же логическая обработка данных (дискретная функция) может иметь несколько представлений, которые различаются разделением входных данных на части (переменные). Входные данные преобразуются в выходные (значения вычисляемых функций) путем выполнения унарных, бинарных, тернарных, и т.д., r-арных операций. Арность или местность операции определяется числом операндов (переменных), участвующих в формировании результата операции. Очевидно, если результат r-арной операции не зависит от одного из операндов, такую операцию следует рассматривать как $(r-1)$-арную. Таким образом, операцией следует назвать функцию, существенно зависящую от своих переменных.

Традиционно, в логической обработке данных, используются унарные и бинарные дискретные операции. Унарная операция может быть определена вектором, а бинарная – матрицей. Вектор $[y_0\,y_1\ldots y_{k_0-1}]$ длины k_0, обозначаемый также как $[y_i]$, является вектором унарной операции, если он содержит как минимум один элемент, отличающийся от других. Единственный операнд этой операции имеет значность k_0. Матрица размерности $k_0 \times k_1$, обозначаемая как $[y_{ij}]$, является матрицей бинарной операции, если она не содержит всех одинаковых строк (столбцов). В этом случае первый операнд имеет значность k_0, а второй – k_1. Будем обозначать применение унарной операции как $[y_i](x_0) = y_{x_0}$, а бинарной – $[y_{ij}](x_0, x_1) = y_{x_0 x_1}$ или $x_0[y_{ij}]x_1 = y_{x_0 x_1}$.

Пример 2. Рассмотрим дискретные функции из табл. 2. Эти функции задают три 4-значные операции

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}(5) = 0, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}(2,1) = 0, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}(1,2) = 0,$$

где показано также их применение.

3. Алгебраическая декомпозиция

Основной задачей логической обработки является декомпозиция дискретной функции или ее представление в виде формулы (выражения), связывающего переменные и операции над ними со значением функции. Известны два крайних подхода для построения формульных представлений. В первом случае, входные переменные преобразуются в значение функции на основе неалгебраических представлений. Второй подход основан на представлении функции в регулярных (алгебраических) формах. Спектральные разложения, в свою очередь, являются предельным случаем алгебраического представления. В табл. 3 приведены основные виды дискретной декомпозиции.

Таблица 3. Декомпозиции дискретной функции

Декомпозиция	Конструкция
Пересекающаяся	$f(X) = \theta(X', a(X''))\,, \quad X' \cap X'' \neq \emptyset$
Разделительная	$f(X) = \theta(X', a(X''))\,, \quad X' \cap X'' = \emptyset$
Кратная	$f(X) = \theta(X', a_1(X''), \ldots, a_m(X''))$
Промежуточная	$f(X) = \sigma(\theta_1(X', a_1(X'')), \ldots, \theta_m(X', a_m(X'')))$
Решающая	$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(X') \times a_i(X'')$
Спектральная	$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(X) \times a_i$

Пересекающаяся [17], разделительная [18, 19] и кратная [20] декомпозиции относятся к классу неалгебраических. Решающая [21] и спектральная [22, 23] выполняются в некоторой алгебраической системе с двумя бинарными операциями и относятся к классу алгебраических. В свою очередь промежуточная декомпозиция [24] является прообразом алгебраической и располагается между алгебраическими и неалгебраическими.

3.1. Разделение переменных

Декомпозиции дискретных функций, кроме пересекающейся, основаны на разделении переменных. Для этого множество переменных $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ разбивается на два непересекающихся подмножества

$$X' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}\}\,,\; X'' = \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_{n-1}\}$$

с числом элементов n' и n'' и значностями k' и k'',

$$k' = \prod_{j=0}^{n'-1} k'_j\,,\; k'' = \prod_{j=0}^{n''-1} k''_j$$

или, что тоже самое, функцию рассматривают зависящей от двух переменных x' и x'' со значностями k' и k'', где $k'k'' = m$. Поясним разделение переменных на примере.

Пример 3. Пусть функция определена векторами

$$\mathbf{F} = [2\,0\,1\,0\,3\,2\,1\,2\,1\,0\,3\,0\,1\,0\,1\,0\,3\,2\,1\,2\,0\,0\,1\,0]\,,\; \mathbf{K} = [2\,2\,3\,2]\,,$$

т.е. зависит от переменных $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ со значностями $k_0 = k_1 = k_3 = 2$ и $k_2 = 3$. Разобьем переменные на два подмножества $X' = \{x_0, x_2\}$ и $X'' = \{x_1, x_3\}$. Тогда $k' = k_0 k_2 = 6$, а $k'' = k_1 k_3 = 4$. Переопределим функцию в виде двумерной таблицы (табл. 4).

Таблица 4.

		x_1	0	1	0	1
		x_3	0	0	1	1
x_0	x_2	$X'\backslash X''$	0	1	2	3
0	0	0	2	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	1	3	1
1	1	3	2	2	2	2
0	2	4	1	3	0	1
1	2	5	0	0	0	0

При построении табл. 4 пересчет переменной $x \in N_{24}$ в переменные $x' \in N_6$ и $x'' \in N_4$ производился с использованием позиционной системы счисления с основаниями $\mathbf{K}' = [2,3]$ и $\mathbf{K}'' = [2,2]$ так,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x_0, x_1, x_2, x_3)_{2232} = \mathbf{T}[(x_0, x_2)_{22}\ (x_1, x_3)_{23}] = \mathbf{T}[c\ r] = t_{rc},$$

где $\mathbf{T}$ обозначает матрицу функции, t_{rc} – элемент этой матрицы, а r (c) – ее строка (столбец). В частности, $t_{32} = \mathbf{T}[2\ 3] = \mathbf{T}[(0,1)_{22}\ (1,1)_{23}] = \mathbf{F}[(0111)_{2232}] = \mathbf{F}[18] = 2$. ■

Заметим, что количество способов, которыми множество из n переменных может быть разделено на два непересекающихся подмножества равно $2^{n-1} - 1$.

3.2. Разложение функции

Решающая и спектральная декомпозиции выполняются в некоторой алгебре $R = < N_k, +, \times >$ (алгебре образующих операций), заданной на множестве N_k двумя бинарными операциями, условно называемыми сложением и умножением. Наибольшее распространение на практике получили такие образующие алгебры как конечное поле ($k = p^q$, где p – простое, q – натуральное) и кольцо целых чисел ($k = 0$).

Пусть задана произвольная m-функция f (функция, с длиной характеристического вектора m) значности $k_f < k$. Представим эту функцию в виде разложения по системе k'-функций θ_i ($i = \overline{0, k'-1}$),

(4) $$f(X) = \sum_{i=0}^{k'-1} \theta_i(X') \times a_i(X''),$$

где a_i – коэффициенты разложения (некоторые k''-функции). Будем предполагать, что спектральные функции θ_i известны. Тогда для нахождения коэффициентов разложения необходимо решить систему линейных уравнений

(5) $$\sum_{i=0}^{k'-1} d_{ji} \times a_i(X'') = f(j, X'') \quad (i = \overline{0, k'-1}),$$

относительно неизвестных функций $a_i(X'')$, где d_{ji} – некоторые константы, $d_{ji} = \theta_i(j)$. Если формульные представления спектральных функций заданы, то после решения системы уравнений (4) получим выражение для функции f, в котором участвуют вычисленные функции-коэффициенты a_i, представленные в табличной форме.

Функции a_i будем раскладывать до тех пор, пока в качестве коэффициентов не появятся константы. В итоге получим формульное представление для исходной функции f. Декомпозиция (4) может быть записана также в матричном виде

(6) $$\mathbf{T} = \mathbf{D} \times \mathbf{A}, \; (\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{T}),$$

где $\mathbf{T}$ ($\mathbf{A}$) – матрица функции (коэффициентов) размерности $k' \times k''$, $\mathbf{D}$ ($\mathbf{Q}$) – матрица прямого (обратного) преобразования размерности $k' \times k'$ с элементами, принимающими значения на множестве N_k. Заметим, что столбцы матрицы $\mathbf{D}$ являются характеристическими векторами спектральных функций θ_i. Поясним сказанное на примере.

Пример 4. Разложим дискретную функцию в конечном поле, образованном операциями

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

заданными на множестве N_4 матрицами Кэли. Нулем этого поля является 0, а единицей – 3. Рассмотрим первую функцию из табл. 2, когда $X' = \{x_0\}$ и $X'' = \{x_1\}$ при $k' = 3$ и $k'' = 2$. После разделения переменных получим двумерную таблицу (табл. 5):

Таблица 5.

$X' \setminus X''$	0	1
0	3	2
1	0	2
2	1	0

Из выражения (4) следует, что

$$f(X)=\theta_0(X')\times a_0(X'')+\theta_1(X')\times a_1(X'')+\theta_2(X')\times a_2(X'').$$

Определим систему спектральных функций так:

$$\theta_0 = 3,\ \theta_0 = \widehat{x}_0,\ \theta_0 = \widetilde{x}_0,$$

где $\widehat{x}$ – увеличение x на единицу, а $\widetilde{x}$ – сдвиг x вправо на один двоичный разряд.

Построим матрицу прямого преобразования $\mathbf{D}$ и найдем в заданном поле обратную ей матрицу $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Далее вычислим матрицу коэффициентов,

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\times\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$f(X)=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}(X')\times\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(X'')+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(X')\times\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}(X'')+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(X')\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(X''),$$

откуда получим

$$\begin{aligned} f(x_0,x_1) &= 2+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(x_0)\times\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}(x_1)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x_0)\times x_1 = \\ &= 2+\hat{x}_0\times\bar{x}_1+\tilde{x}_0\times x_1, \end{aligned}$$

где $\overline{x}$ – унарная операция, преобразующая нуль и единицу переменной x соответственно в единицу и нуль конечного поля.

3.3. Алгебры образующих операций

Существует шесть типов алгебр [25], порождающих различные классы спектральных функций (табл. 6). Все они предназначены для решения системы линейных алгебраических уравнений (5). Для этого определенные требования налагаются на операции алгебр и вводятся некоторые ограничения на вид спектральных функций.

Таблица 6. Алгебры образующих операций

Функции	Двузначные	Многозначные
Унимодальные	Логики R_L	Мультипликативная R_M
Мультимодальные	Аддитивная R_A	Конечное поле R_F
Бимодальные	Уолша R_W	Целостное кольцо R_R

Алгебра логики имеет нейтральный элемент по сложению σ (нуль) и левый нейтральный элемент по умножению τ (единица). У мультипликативной алгебры операция умножения является обращаемой на множестве $N_k \setminus \{\sigma\}$. Операция сложения аддитивной алгебры образует коммутативную группу на N_k. В конечном поле сложение и умножение формируют коммутативные группы на своих множествах, а сложение дистрибутивно относительно умножения. В целостном кольце имеется коммутативная группа по сложению, отсутствуют нетривиальные делители нуля и, как и в поле, выполняется дистрибутивный закон. Алгебра Уолша является подкольцом целостного кольца. Ограничения, налагаемые на коэффициенты уравнений d_{ji} в каждой из алгебр определяются теоремами разложения и задают соответствующий класс спектральных базисов. В частности, в алгебре логики система спектральных функций должна представляться матрицей перестановок, в мультипликативной алгебре – мономиальной матрицей, в аддитивной алгебре – логической матрицей, имеющей ненулевой определитель, по модулю меньший циклического порядка группы по сложению, в конечном поле – обращаемой матрицей, в алгебре Уолша и целостном кольце – матрицей, имеющей ненулевой определитель.

На практике распространение получило небольшое число спектральных функций (табл. 7). В классе унимодальных используются дизъюнктивные [26], конъюнктивные [21], литеральные [27] и интервальные [28] функции. Из многомодальных применяются функции Жегалкина [29], Рида-Малера [30, 31], теоретико-числовые [13, 14] и полиномиальные [15]. Бимодальные функции представлены функциями Радемахера [16], Уолша [32], Хаара [33] и Виленкина-Крестенсона [34, 35].

Таблица 7. Системы спектральных функций

Функции	Двузначные	Многозначные
Унимодальные	Дизъюнктивная Коньюнктивная	Литеральная Интервальная
Мультимодальные	Жегалкина Рида-Маллера	Теоретико-числовые Полиномиальные
Бимодальные	Радемахера Уолша	Хаара Виленкина-Крестенсона

3.4. Функциональная полнота

Как показано выше, при алгебраической декомпозиции используется базис

$$\Omega = \{+\times, \{\theta_i\}, \{a_j\}\},$$

состоящий из операций образующей алгебры R, фиксированного множества спектральных k'-функций и множества, содержащего все возможные k''-функции, где $k'k'' = m$, а m – длина характеристического вектора декомпозируемой функции. В пределе, когда $k' = m$ имеем спектральную декомпозицию, у которой множество $\{a_j\}$ – константы алгебры R. Базис Ω является функционально полным. Его полнота непосредственно следует из разрешимости системы линейных уравнений (5) благодаря свойствам операций образующей алгебры и ограничениям, накладываемым на спектральные функции.

4. Мультипликативная алгебра

4.1. Теоремы разложения

Определение 1. Алгебраическая система $R_M =< N_k,+,\times>$ называется примитивной мультипликативной алгеброй, если существуют элемент $\sigma \in N_k$, такой, что для произвольного $a \in N_k$ выполняются равенства

$$\sigma + a = a,\ \ a + \sigma = a,\ \ \sigma \times a = \sigma$$

и уравнение $a \times x = b$ имеет единственное решения относительно x при произвольных $a \neq \sigma$ и b.

Из определения 1 следует, что умножение является операцией (не обязательно ассоциативной), которая имеет левую обратную на множестве $N_k \setminus \{\sigma\}$. Это означает, что матрица операции умножения имеет строку σ состоящую только из элементов σ, а все остальные строки таковы, что каждый элемент из N_k повторяется не более одного раза.

Определение 2. Мономиальной матрицей называется квадратная матрица, получаемая перестановкой строк (столбцов) диагональной матрицы с элементами $d_i \neq \sigma$.

Мономиальной будет такая матрица, которая в каждой строке и в каждом столбце содержит только один элемент, отличный от σ. Мономиальная матрица может быть получена из матрицы перестановок заменой единичных элементов на произвольные ненулевые элементы.

Теорема 1. Произвольная функция f представима в примитивной мультипликативной алгебре R_M в виде разложения (4), если спектральные функции образуют матрицу прямого преобразования $\mathbf{D}$, которая является мономиальной.

Доказательство. Из мономиальности матрицы $\mathbf{D}$ следует, что в каждом уравнении системы (5) только один элемент d_{jt} отличен от σ. Тогда в R_M система (5) вырождается в

$$f(j, X'') = d_{jt} \times a_t(X'') \ \ (j = \overline{0, k'-1}),$$

и откуда могут быть найдены функции $a_t(X'')$ $(t = \overline{0, k'-1})$. Следовательно, система уравнений (5) разрешима в R_M. Последнее означает, что произвольная функция представима разложением (4).

Пример 5. Пусть операции сложения и умножения примитивной мультипликативной алгебры заданы матрицами

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

где сложение – двухразрядная побитовая дизъюнкция, а умножение имеет левую обратную операцию на множестве $\{1, 2, 3\}$ и представляет собой усеченное сложение по модулю 4. Из матриц операций находим, что $\sigma = 0$. Определим систему спектральных функций мономиальной матрицей $\mathbf{D}$ и для функции из примера 4 запишем систему уравнений $\mathbf{D} \times \mathbf{A} = \mathbf{T}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0(0) & a_1(0) \\ a_0(1) & a_1(1) \\ a_0(2) & a_1(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда, решая каждое уравнение в отдельности, находим матрицу коэффициентов,

$$\begin{cases} 3 \times a_0(1) = 3 \\ 1 \times a_0(2) = 0 \\ 2 \times a_0(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3 \times a_1(1) = 2 \\ 1 \times a_1(2) = 2 \\ 2 \times a_1(0) = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}(X'').$$

При доказательстве теоремы 1 использованы ограничения на операцию умножения, минимально необходимые для разрешимости системы уравнений (5). Однако, эти ограничения недостаточны для применения матричного аппарата обратного дискретного преобразования (6). В примитивной алгебре матрица обратного преобразования $\mathbf{Q}$ зависит от представляемой функции (см. пример 5), в то время как в других образующих алгебрах она определяется только спектральными функциями. Следовательно, матрица обратного преобразования не может быть вычислена заранее, когда представляемая функция еще неизвестна.

Определение 3. Мультипликативная алгебра называется непримитивной, если операция умножения образует группу $G_M =< N_k \setminus \{\sigma\}, \times >$.

В непримитивной алгебре умножение ассоциативно и уравнения $a \times x = b$ и $x \times a = b$ имеют единственные решения при $a \neq \sigma$. Последнее означает, что существует единственный нейтральный элемент $\tau \neq \sigma$, такой, что $\tau \times a = a \times = a$ и для любого элемента $a \neq \sigma$ существует обратный ему элемент a^{-1}, такой что $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = \tau$.

Теорема 2. Если матрица $\mathbf{D}$ является мономиальной, то произвольная функция f представима в непримитивной мультипликативной алгебре разложением (4), для которого существует матрица обратного преобразования $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{D}}^T$, где $\widetilde{\mathbf{D}}$ получается из $\mathbf{D}$ заменой ненулевых элементов на обратные.

Доказательство. Умножим левую и правую части матричного выражения (6) на $\widetilde{\mathbf{D}}^T$ и получим $\widetilde{\mathbf{D}}^T \times \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{D}}^T \times \mathbf{D} \times \mathbf{A}$. Так как умножение ассоциативно и $\widetilde{\mathbf{D}} \times \mathbf{D} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, то справедливо выражение коэффициентов разложения через матричные операции, $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{D}}^T \times \mathbf{T}$. Откуда находим $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{D}}^T$.

Заметим, что в мультипликативной алгебре умножение может быть некоммутативной операцией и отсутствует требование дистрибутивности сложения относительно умножения, как это имеет место в конечном поле и целостном кольце.

Пример 6. Пусть сложение и умножение заданы матрицами

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

где сложение, как и ранее, двухразрядная побитовая дизъюнкция, а умножение образует группу на множестве $\{1, 2, 3\}$. Из матриц операций находим, что $\sigma = 0$ и $\tau = 3$. Определим систему спектральных функция мономиальной матрицей $\mathbf{D}$ и найдем в заданной алгебре матрицу обратного преобразования $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{D}}^T \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее для функции из примера 4 вычислим матрицу коэффициентов,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} (X') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (X'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} (X') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} (X'') + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (X') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (X'').$$

Нетрудно показать, что количество представлений произвольной функции в мультипликативной алгебре равно $k'!(k-1)^{k'}$, где k – значность мультипликативной алгебры, k' – длина характеристического вектора спектральных функций. При спектральном разложении это количество максимально и равно $m!(k-1)^m$, где m – длина характеристического вектора декомпозируемой функции.

4.2. Мультипликативные формы

В мультипликативной алгебре спектральные функции образуют мономиальную матрицу, то есть принимают ненулевые значения только в одной точке области определения, причем различные функции в различных точках. По классификации из табл. 6 находим, что эти функции относятся к классу многозначных унимодальных.

Поставим задачу оптимального синтеза дискретной функции в мультипликативной алгебре. Оптимальной будем называть такую форму, у которой число операций (логических элементов), требуемое для вычисления (реализации) функции минимально.

В начале поставим задачу так определить алгебру и систему спектральных функций, чтобы количество слагаемых m' в выражении (5) было минимальным, $m' \le k'$. Заметим, что некоторое слагаемое будет отсутствовать в разложении, если единственное ненулевое значение спектральной функции $\theta_i(X')$, будучи умноженное на функцию-коэффициент $a_i(X'')$ дает нуль алгебры σ. Так как уравнение $d \times a = \sigma$ имеет единственное решение относительно a при $d \neq \sigma$, то функция-коэффициент $a_i(X'')$ должна не зависеть от переменных из множества X'', то есть равняться некоторой константе. Следовательно, в качестве нуля алгебры следует использовать элемент, из которого состоит наибольшее число константных строк матрицы функции. При спектральном разложении, когда все коэффициенты являются константами, нуль алгебры должен совпадать с наиболее часто встречающимся значением в характеристическом векторе. С другой стороны, для каждой функции-коэффициента можно задать свою спектральную функцию. Последнее означает, что путем выбора спектральных функций число умножений в разложении может быть уменьшено на количество константных строк, имеющихся в матрице функции, а наиболее часто повторяющиеся элементы в характеристических векторах коэффициентов преобразованы в один и тот же элемент.

4.3. Демонстрационный пример

Рассмотрим функцию из примера 3. Для ее представления в мультипликативной форме будем использовать ранее определенную в примере 5 примитивную алгебру.

Для начала зададим систему спектральных функций произвольной диагональной матрицей и вычислим матрицу коэффициентов. Представим результаты вычислений в виде системы уравнений вида $\mathbf{T} = \mathbf{D} \times \mathbf{A}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь определим спектральные функции так, чтобы наибольшее число коэффициентов стало равным некоторому элементу $\delta \in N_4$. Для этого потребуем, чтобы уравнение $x \times \delta = b$ имело единственное решение относительно x для произвольных b. В примитивной алгебре, определенной в примере 5, это возможно только при $\delta = 0$, в непримитивной алгебре, когда умножение образует группу, δ может быть любым, кроме нуля алгебры.

Представим теперь заданную функцию в непримитивной алгебре из примера 6. При заданном разделении переменных находим, что в нулевой строке наибольшее число раз встречается 1, в первой строке – 0, во второй – 3 и 1, в третьей – 2, в четвертой – 1 и в пятой 0. Для уменьшения количества операций умножения положим $\delta = \tau$, так как известно, что $a \times \tau = a$. Так как уравнение $x \times \tau = b$ имеет единственное решение для произвольных b, находим

$$\begin{cases} d_0 \times 3 = 1 \\ d_1 \times 3 = 0 \\ d_2 \times 3 = 3 \\ d_3 \times 3 = 2 \\ d_4 \times 3 = 1 \\ d_5 \times 3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d_0 & = & 1 \\ d_1 & = & 0 \\ d_2 & = & 3 \\ d_3 & = & 2 \\ d_4 & = & 1 \\ d_5 & = & 0 \end{cases}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нулевые столбцы в матрице $\mathbf{D}$ не нарушают условия теоремы разложения, а только лишь указывают на то, что данная спектральная функция не используется в разложении. Так как имеется возможность приравнять функцию-коэффициент к нулю, то нулевая спектральная функция может быть произвольной (показано *),

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переставим столбцы матрицы $\mathbf{D}$ так, чтобы тривиальные функции-коэффициенты были последними в разложении,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В итоге получим

$$f(X) = \theta_0(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} (X'') + \theta_1(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} (X'') + \theta_2(X') \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} (X'') + \theta_3(X').$$

Для получения окончательного выражения осталось представить функции-коэффициенты в виде выражений, возможно в другой алгебре.

5. Реализация мультипликативных форм

Поставим задачу поиска аналитических конструкций, позволяющих эффективным образом представлять многозначные унимодальные функции в виде выражений в некотором базисе операций.

Так как ненулевое значение многозначная унимодальная функция принимает только в одной точке, то такие функции могут быть отнесены к первичным, то есть не нуждающиеся в разложении. Табличное вычисление этих функций представляется малоэффективным, так как их характеристические вектора состоят, в основном, из одного и того же элемента и этот элемент равен нулю мультипликативной алгебры. Следовательно, необходимо найти операции, позволяющие эффективно вычислять многозначную унимодальную функцию и поиск таких операций следует осуществлять с учетом операционных возможностей используемых вычислительных средств – при программной реализации, или применяемой элементной базы – при аппаратной.

При программной реализации многозначные унимодальные функции легко вычисляются с использованием операций сравнения и условного перехода. Реализация алгебраических операций также не представляет трудности. Так как необходимо обеспечить возможность выбора нуля алгебры, сложение следует реализовать с использованием поразрядной операции суммы по модулю 2 следующим образом: $a+b=a\oplus b\oplus\sigma$. Операция умножения примитивной алгебры может быть построена на основе арифметического сложения путем его усечения, то есть установки результата умножения в σ, когда первый операнд равен σ. При этом, очевидно, необходимо использовать операцию сравнения, сложения и условного перехода. Умножение непримитивной алгебры также может быть построено на основе операции сложения путем ее усечения по двум операндам и смещения результата сложения на 1 (известно, что сложение по модулю 2^r).

Аппаратная реализация мультипликативных форм также не представляет трудности и осуществляется аналогично программной. При этом используются такие элементы как логические компараторы и конъюнкторы – для реализации унимодальных функций, дизъюнкторы или сумматоры по модулю 2 – для объединения результатов вычисления спектральных функций и сумматоры – для реализации операции умножения.

6. Заключение

Применение мультипликативной алгебры при алгебраической декомпозиции дискретной функции позволяет по виду функции, до проведения синтеза, определить эффективность ее формульного представления.

Другим важным свойством мультипликативной формы является возможность управлять значениями коэффициентов. В частности, при спектральном разложении может быть синтезирована форма, все коэффициенты которой нули или единицы, то есть результирующее выражение не будет содержать операций умножения.

Путем перестановки (задания другой нумерации) многозначных унимодальных функций возможно получение форм, у которых первоначально вычисляются наиболее вероятные функции и, в случае не равенства результата вычисления нулю, дальнейшие вычисления прекращаются, а вычисленное значение однозначно определяет итоговый результат.

Перечисленные свойства отличают мультипликативную форму от известных форм и позволяют свести синтез минимальных форм дискретных функций к поиску такого разделения переменных, при котором ее прямоугольная таблица содержит наибольшее число константных строк (в противоположность разделительной декомпозиции, когда ищется наибольшее число одинаковых строк).

Список литературы

1. *Яблонский С.В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75-121.

2. Coloring Large Graph // Proc. of the 1981 S.E. Conf. on Graph Theory, Combinatorics

3. Малюгин В.Д. Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 84-93.

4. Малюгин В.Д. Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 114-122.

5. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Кратные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.

and Computer Science. 1981.

6. *Lee C.Y.* Representation of switching circuits by binary decision programs // Bell Systym Technical Journal. 1959. Vol. 38, No. 4. P. 985.

7. *Akers S.B.* Binary decision diagrams // IEEE Trans. Computers. 1978. Vol. C-27, No. 6. P. 509-516.

8. *Bernstein B.* Operations with Respect to wich the Elements of Boolean Algebra from a Group // Trans. Amer. Math. Soc. 1924. Vol. 26. P. 171-175.

9. *Cohn M.* Switching Functions Canonical Form over Integer Fields (Ph.D. Thesis). Cambridge: Harvard Univ., 1960.

10. *Меркин Ю.В.* Арифметические формы записи булевых выражений и их применение для расчета надежности схем // Вычислительные системы. Вып. 7. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1963. С. 13-23.

11. *Tosic Z.* Analytical Representation of an m-Valued Logical Function over the Ring of Integers Modulo m (Ph.D. Thesis). Beograd, 1972.

Проблемы управления. 2004. № 3. С. 67-77.

12. *Green D.H.* Reed-Muller Expansions of Incompletely Specified Functions // Proc. IEE. 1987. Part E-134. P. 228-236.

13. *Фараджиев Р.Г., Ципкин Я.З.* Преобразования Лапласа-Галуа в теории последовательных машин // Доклады Академии наук СССР. 1966. Т. 166 № 36.

14. *Rader C.M.* Discrete convolution via Mersenne transorm // IEEE Trans. Comp. 1972. Vol. C-21.

15. *Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. Москва: Радио и связь, 1983.

16. *Rademacher H.* Einige Satze uber Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. 1922. Vol. 87. P. 112–138.

17. *Закревский А.Д.* Алгоритм декомпозиции булевых функций // Труды Сибирского физико-технического института. 1964. Вып. 44. С. 5-16.

18. *Ashenhurst R.L.* The Decomposition of Switching Functions // Bell Laboratory Report, 1952, No. BL-1(11). P. 541-642.

19. *Поваров Г.Н.* О функциональной разделимости булевых функций // Доклады Академии Наук СССР. 1954. Т. 94. С. 801-803.

20. *Curtis H.A.* Non-Disjunctive Decomposition // Bell Laboratory Report, 1958, No. 19, P. 49.

21. *Shannon C.E.* The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits // Bell System Technical Journal. 1949. No. 28. P. 59-98. Vol. 29. P. 74-116.

22. *Lechner R.J.* Harmonic Analysis of Switching Functions. // Recent Developments in Switching Theory. Academic Press, 1971. P. 121-228.

23. *Карповский М.Г., Москалев Э.С.* Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. М.: Энергия, 1973.

24. *Лупанов О.Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1958. № 1. С. 120-140.

25. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

26. *Boole G.* The Laws of Thought. London: Macmillan, 1854.

27. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.

28. *Vranesic Z.C., Lee E.S., Smith K.S.* A Many-Valued Algebra for Switching Systems // IEEE Trans. Computers. 1970. Vol. C-19. P. 964-971.

29. *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Математический сборник. 1927. Т. 43. С. 9-28.

Проблемы управления. 2004. № 3. С. 67-77.

30. *Reed L.S.* A class of multiple error correction codes and their decoding scheme // IRE Trans. on Inform. Theory. 1954. V. 4. P. 38-42.

31. *Muller D.E.* Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection // IRE Trans. Electron. Comput. 1954. V. EC-3. P. 6-12.

32. *Walsh J.L.* A closed set of orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 55. P. 5-24.

33. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonolen Funktionensysteme. Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331-371.

34. *Виленкин Н.Я.* Класс полностью ортогональных систем // Известия Академии наук СССР. 1947. Сер. Математика. № 11. С. 363-400.

35. *Chrestenson H.E.* A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5. P. 17-31.