Труды Международной конференции "Математическая теория систем". М.: Институт системного анализа РАН, 2009. С. 107-111.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЯЗЫКОВОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОНЯТИЙНОГО АНАЛИЗА

В.С.Выхованец

Институт проблем управления РАН
г. Москва, ул. Профсоюзная, 65, Россия
E-mail: valery@vykhovanets.ru

Для построения математической модели предметной области использованы две формальные системы. Первая формальная система – исчисление понятий, применена для формальной спецификации результатов понятийной декомпозиции предметной области. Вторая формальная система – специализированный предметный язык, или проблемный язык, строится для каждого класса решаемых задач и используется для описания их решения. Исследуются выразительные возможности предложенного подхода к высокоуровневому моделированию предметной области.

Понятия и их абстракции

Под предметной областью будем понимать фрагмент реальной (мыслимой) действительности, представляемый некоторой совокупностью принадлежащих ему сущностей. Сущность определим как устойчивое и уникальное представление о выделенной части предметной области. Сущность воспринимается в виде своих признаков. Признак – именованная сущность, характеризуемая множеством своих проявлений (значений) и имеющая проблемную интерпретацию (семантическую роль).

Понятие определим как именованное множество сущностей, объединенных на основе сходства своих признаков. Понятия будем именовать, и задавать схемой, интенсионалом и экстенсионалом. Интенсионал, или содержание понятия, представим набором значений взаимосвязанных признаков, позволяющим отличать сущности, принадлежащие понятию, от других сущностей предметной области. Экстенсионал, или объем понятия, будем задавать множеством сущностей, принадлежащих понятию.

Схему понятия зададим набором признаков, на которых понятие определено. Признаки в этом случае будем интерпретировать как некоторые элементарные понятия, на которых определяется схема.

Понятия образуются при абстрагировании. Следует различать уровни абстрагирования: абстрагирование, приводящее к образование простых понятий, и абстрагирование, результатом которого является образование сложных понятий [1].

Известны следующие способы абстрагирования понятий [2]: обобщение-специализация, типизация-конкретизация, агрегация-декомпозиция, ассоциация-индивидуализация. Обобщение и типизация и обратные им абстракции специализации и конкретизации выражают общность понятий, проявляющуюся при дифференциации признаков. Ассоциация и агрегация и противоположные им индивидуализация и декомпозиция раскрывают интеграцию понятий.

Семантическая теория понятий

В отличие от известных формализмов (семантических сетей, концептуальных схем, и др.), где на понятиях задается неограниченное множество отношений различной природы, введем в использование новый формализм – понятийную структуру, которую определим множеством понятий с четырьмя видами отображений, единственное назначение которых – показать способы образования понятий, способы их абстрагирования [3].

Схему произвольного понятия будем вычислять на основе отображений абстрагирования, заданных в понятийной структуре. Для этого воспользуемся следующей рекуррентной процедурой:

– схема простого понятия N равна (N);

– схема понятия, полученного в результате дифференциации, равна пересечению схем дифференцируемых понятий;

– схема понятия, полученного в результате интеграции, равна объединению схем интегрируемых понятий;

– схема понятия, полученного в результате дифференциации и интеграции, равна объединению схем интегрируемых понятий, принадлежащему пересечению схем дифференцируемых понятий.

Требование вычислимости схем понятий является распространением свойства регулярности (фундированности) множеств на понятия. В этом случае вычислимость схем понятий по понятийной структуре предметной области гарантирует отсутствие определений понятий через самих себя, что в любой формальной или содержательной теории, претендующей на адекватность, признается недопустимым.

Синтаксическая теория понятий

Определение 1. Формулой формальной теории понятий будем называть понятийную структуру, которая дополнена описанием интенсионалов всех входящих в нее понятий. Формулу формальной теории понятий будем называть:

– синтаксически полной, если в ней отсутствуют понятия, которые не содержат ни одной сущности, т.е. экстенсионал которых пуст;

– семантически полной, если в ней определены все понятия, способы их абстрагирования и выражения, необходимые для описания заданной области интерпретации;

– противоречивой, если в ней описана сущность, выраженная как принадлежащая, так и как не принадлежащая экстенсионалу одного и того же понятия.

Определение 2. Формальную теорию понятий будем называть:

– непротиворечивой, если все выводимые в теории формулы непротиворечивы;

– семантически полной, если для любой области интерпретации существует в теории вывод соответствующей ей формулы;

– синтаксически полной, если для любой выводимой в теории формулы существует область интерпретации;

– разрешимой, если существуют конструктивные средства для распознавания формул, выводимых в теории.

Стандартной интерпретацией формальной теории понятий является понятийная область (семантическая теория понятий), относительно которой известно, что она принадлежит некоторой предметной области, которая, в свою очередь, структурирована на понятийном уровне и включает способы образования и выражения понятий. Предполагается, что любая предметная область допускает в качестве своего минимального фрагмента область понятийной интерпретации, а через нее, в случае необходимости, может содержать и подобласть логической интерпретации (рис. 1).

Исчисление понятий

Исчисление понятий определим как исчисление понятийных структур, а саму понятийную структуру будем задавать множеством формул, каждая из которых выражает образование одного из ее понятий [4].

Алфавит исчисления включает знаки понятий N_1, N_2, ...; знак неопределенности $\neg$, знаки операций объединения $\cup$, пересечения $\cap$, строгого $\supseteq$ и нестрогого $\supset$ включения, круглых скобок), (. Исчисление понятий строится на базе теории множеств и включает ее аксиоматику.

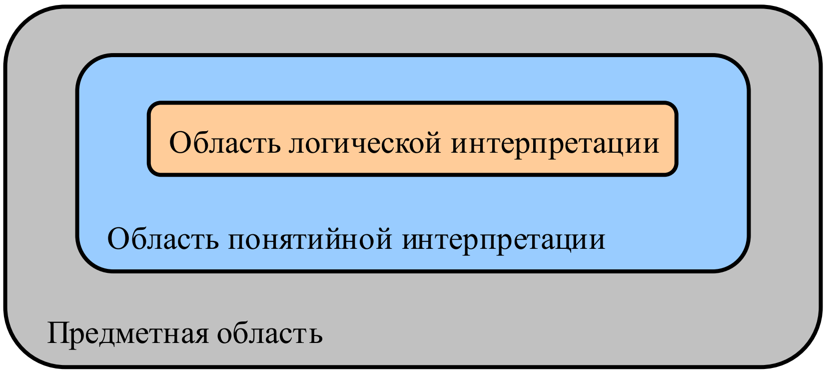

Рис. 1. Взаимосвязь областей интерпретации

Единственной дополнительной аксиомой является аксиома существования пустого понятия, которое определяется как понятие, имеющее пустое множество признаков, пустой интенсионал и экстенсионал:

0) $\dfrac{()()}{()}$,

где для обозначения понятия использована дробь: в числителе дроби между парами фигурных скобок задается имя понятия (у пустого понятия имя отсутствует) и способы его образования – списки дифференциации (первая пара скобок) и интеграции (вторая пара скобок), а в знаменателе – схема понятия, которая для пустого понятия также пуста.

Понятийную структуру будем представлять формулой, состоящей из подформул. Правила вывода зададим в виде вычислимых отображений подформул-посылок в подформулу-заключение. При этом посылками могут стать только подформулы, которые выведены ранее и принадлежат множеству подформул понятийной структуры. Заключение вывода – это новая подформула, которая включается в формулу понятийной структуры. В исчислении понятий будем использовать следующие четыре правила вывода, представленные в виде схем, или метаформул:

1) $\dfrac{()()}{()} \overset{\neg N}{\mapsto} \dfrac{()N()}{(N)}$;

2) $\dfrac{(\ldots)N_1(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_1}\ldots\dfrac{(\ldots)N_m(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_m} \underset{\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{shm}\,N_i \supset ()}{\overset{\neg N}{\mapsto}} \dfrac{(N_1\ldots N_m)N()}{\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{shm}\,N_i}$;

3) $\dfrac{(\ldots)N_1(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_1}\ldots\dfrac{(\ldots)N_m(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_m} \underset{\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{shm}\,N_i \supset ()}{\overset{\neg N}{\mapsto}} \dfrac{()N(N_1\ldots N_m)}{\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{shm}\,N_i}$;

4) $\dfrac{(\ldots)N_1(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_1}\ldots\dfrac{(\ldots)N_m(\ldots)}{\mathrm{shm}\,N_m} \underset{\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{shm}\,N_i \supseteq \bigcup_{j=t+1}^{m}\mathrm{shm}\,N_j \supset ()}{\overset{\neg N}{\mapsto}} \dfrac{(N_1\ldots N_t)N(N_{t+1}\ldots N_m)}{\bigcup_{j=t+1}^{m}\mathrm{shm}\,N_j}$.

Каждое правило имеет левую и правую части. В левой части (до знака вывода $\mapsto$) задаются посылки, в правой части, после знака вывода, – заключение. Указание условий, при которых правило может быть применено, осуществляется над и под знаком вывода. По своей сути условия – это дополнительные посылки, выраженные на языке теории множеств и которые должны выполняться до применения правил.

Утверждение 1. Исчисление понятий полно и непротиворечиво.

Утверждение 2. Исчисление понятий разрешимо.

Логическая теория

Логическую теорию понятий определим как расширение исчисления понятий за счет дополнения его формализма исчислением предикатов первого порядка, которое в этом случае используется для выражения интенсионалов.

Утверждение 3. Логическая теория понятий является разрешимой относительно одноместного исчисления предикатов.

При использовании непротиворечивых формул одноместного исчисления предикатов для выражения интенсионалов понятий все формулы логической теории понятий также будут непротиворечивы. Для обеспечения синтаксической полноты логической теории дополним правила вывода 1)-4) еще одним условием, которое устанавливает отсутствие противоречия при выражении интенсионала каждого понятия.

Утверждение 4. Логическая теория понятий является непротиворечивой и синтаксически полной относительно одноместного исчисления предикатов.

Определение 3. Областью логической интерпретации называется такая область интерпретации, в которой экстенсионал произвольного понятия выразим на языке одноместного исчисления предикатов.

После приведенных выше рассуждений уточним понятие семантической полноты логической теории в виде следующего утверждения.

Утверждение 5. Логическая теория понятий является семантически полной относительно области логической интерпретации.

Контекстно-свободная теория

Расширим формализм исчисления понятий на относительно произвольную формальную систему, которую будем использовать для выражения интенсионалов. Для такого расширения воспользуемся грамматической формой. Контекстно-свободную теорию понятий определим как расширение исчисления понятий, выполненное на основе формализма контекстно-свободных грамматик.

Утверждение 6. Контекстно-свободная теория понятий является непротиворечивой, синтаксически полной и разрешимой.

Определение 4. Областью бесконтекстной интерпретации называется такая область интерпретации, в которой экстенсионал произвольного понятия выразим на контекстно-свободном формальном языке.

Утверждение 7. Контекстно-свободная теория понятий является семантически полной относительно бесконтекстной области интерпретации.

Контекстная теория понятий

Рассмотрим исчисление понятий, в котором для выражения интенсионалов используется формализм контекстных грамматик. Получаемую в результате теорию будем называть контекстной теорией понятий.

Утверждение 8. Контекстная теория понятий непротиворечива, синтаксически неполна и неразрешима.

Определение 5. Областью контекстной интерпретации называется область интерпретации, в которой экстенсионал произвольного понятия выразим на контекстно-зависимом формальном языке.

Утверждение 9. Контекстная теория понятий является семантически полной относительно контекстной области интерпретации.

Другие теории

Возможности дальнейшего наращивания выразительных качеств формализма для описания интенсионалов понятий ограничиваются неразрешимостью языков, порожденных произвольными грамматиками [5, с. 299].

Утверждение 10. Других непротиворечивых (синтаксически полных) формальных теорий понятий не существует.

Отношения между областями интерпретации, в которых различные теории понятий являются семантически полными или, иными словами, для каких областей интерпретации эти теории предназначены, показаны на рис. 2.

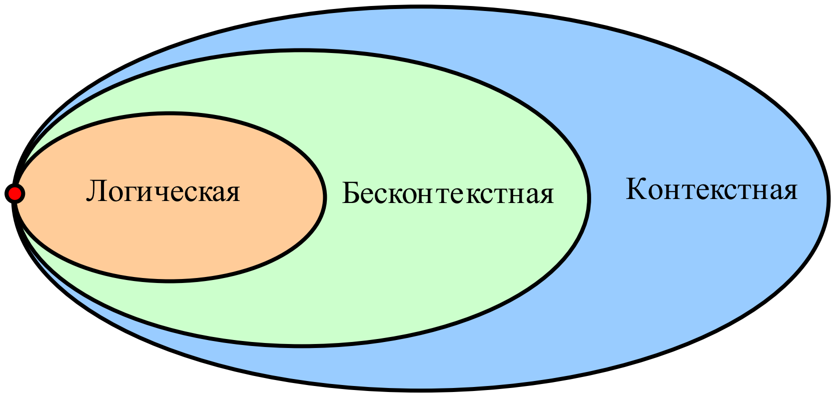

Рис. 2. Области интерпретации формальной теории понятий

Заключение

В заключении укажем на ряд практических приложений, выполненных на основе разработанной формальной теории понятий. В работах [6, 7] для репрезентации знаний, накопленных в той или иной информационной системе, строится понятийная модель предметной области, которая включает понятийную структуру, правила извлечения фактов и правила выражения понятий. Понятийная структура представляется множеством понятий, соединенных между собой связями абстрагирования. К каждому узлу-понятию привязаны действия (правила извлечения фактов), которые необходимы для извлечения сущностей этого понятия из имеющихся данных с учетом проблематики репрезентации. Сама репрезентация фрагмента знания, представленного извлеченными фактами и структурированного понятийной структурой, осуществляется на основе задания правил выражения понятий в одной из возможных выходных форм – в виде изображений, текста, звука, речи, и др., для чего используются специальные языки репрезентации (проблемные языки).

Список литературы

1. Макетирование, проектирование и реализация диалоговых информационных систем / Под ред. Е. И. Ломако. М.: Финансы и статистика, 1993.

2. Гаскаров Д.В. Интеллектуальные информационные системы. М.: Высш. шк., 2003.

3. Выхованец В.С. Что истинно во всех мирах // Матер. межд. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве». Тирасполь, 2007. С. 36.

4. Выхованец В.С. Исчисление понятий // Тез. докл. межд. конф. «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». М., 2007. С. 87-88.

5. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. М.: Лань, 2005.

6. Выхованец В.С. Репрезентация знаний в системах управления крупномасштабными производствами // Тез. докл. Межд. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем». М., 2007. С. 124-125.

7. Выхованец В.С. Репрезентация знаний // Матер. Межд. конф. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта». М., 2007. С. 49-53.