Труды Четвертой Международной конференции по проблемам управления. М.: Институт проблем управления РАН, 2009. С.1465 - 1473

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФОРМУЛ

Выхованец В.С.

Институт проблем управления РАН
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: valery@vykhovanets.ru

Аннотация. Рассмотрена проблема синтеза формул дискретных функций. Разработана методика аналитического синтеза формул, позволяющая получать наилучшие представления для подавляющего большинства функций. Приводятся точные оценки сложности синтезируемых формул.

Введение

Исследование сложности представления булевых функций предпринято в работах К. Шеннона [1], О.Б. Лупанова [2], В.В. Кузьмина [3]. Основной их результат – почти все функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной, для которой найдены асимптотические оценки. Однако нахождение минимальных формул сопряжено с полным перебором возможных решений, что практически осуществимо только для функций небольшой размерности.

Таким образом, следует отличать синтез формул по методикам, удовлетворяющим асимптотическим оценкам, от минимизации функций, которая выполняется переборными методами. По этой причине под аналитическим синтезом будем понимать получение такого представления дискретных функций, которое содержит количество операций, не превосходящее максимально необходимого для произвольной функции той же размерности.

Настоящая статья посвящена исследованию алгебраической декомпозиции дискретных функций в наиболее общей постановке задачи, когда с целью получения эффективных описаний дискретной обработки данных переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, а выбор алгебраических операций не ограничен какими-либо их подмножеством.

Под аналитическим синтезом будем понимать получение такого представления дискретных функций, которое содержит количество операций, не превосходящее максимально необходимого для подавляющего большинства функций той же размерности. В свою очередь минимизацию определим как нахождение такой формы представления функции, которая включает наименьшее из возможных число операций. Очевидно, что количество операций, получаемых при минимизации, не будет превосходить количество операций, получаемых при аналитическом синтезе. Заметим, что для подавляющего большинства функций результат их минимизации и аналитического синтеза по количеству операций будет совпадать.

1. Содержательная постановка задачи

Поставим задачу синтеза формульного представления некоторой дискретной функции $f(X)$, принимающей значения на множестве N_f и зависящей от переменных $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, принимающих значения на множествах N_0, N_1, ..., N_{n-1} соответственно.

Для этого рассмотрим разложения этой функции в алгебре $A = < N_f, +, \times >$, образованной на множестве N_f операциями сложения и умножения, по функциям g_i и h_i от непересекающихся множеств переменных X' и X'', таких, что $X' \cup X'' = X$:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X') \times h_i(X''), \tag{1}$$

где $\cup$ – операция объединения множеств, а m – длина вектора функции f, равная произведению значностей переменных, или произведению числа элементов в множествах N_0, N_1, ..., N_{n-1} [4].

Заметим, что частным видом алгебраической декомпозиции (1) является решающее разложение [5]

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x) \times h_i(X \setminus x),$$

у которого g_i – система решающих функций от одной переменной $x \in X$, а h_i – остаточные функции, где $\setminus$ – операция разности множеств. В случае, когда $X' = X$ и $X'' = \varnothing$, имеем спектральную форму [6]

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i,$$

у которой g_i – система спектральных функций, h_i – коэффициенты разложения.

При алгебраической декомпозиции тип базиса определяется образующими его алгебраическими операциями. Для булевых функций используется классический базис Буля с операциями конъюнкции и дизъюнкции, базис Жегалкина с операциями неэквиваленции и конъюнкции, арифметический базис. В многозначной логике применяются базисы с операциями максимума и минимума, сложения по модулю k и минимума, операцией арифметического сложения и поразрядными логические операциями, арифметическими операциями на кольце целых чисел, операциями полей Галуа. В работе [4] показано, что помимо известных – алгебры логики и фундаментальной алгебры (конечного поля и целостного кольца), существуют еще две алгебраические системы, в которых возможно разложение (1). Это аддитивная и мультипликативная алгебры.

Аналитический синтез формулы дискретной функции f с длиной вектора m будем искать в виде ее разложения

$$f(X) = \sum_{i=0}^{M-1} g_i(X') \times h_i(X''), \tag{2}$$

по системе функций меньшей размерности g_i и h_i в аддитивной или фундаментальной алгебре $A = < N_f, +, \times >$, образованной двумя операциями на конечном носителе $N_f = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, где множество переменных X разделено на два непересекающихся подмножества X' и X'' с числом элементов n' и n'' и произведением значностей k' и k'', $k'k'' = m$.

На следующем шаге функции h_i подвергнем спектральному разложению,

$$h_i(X'') = \sum_{j=0}^{M_i-1} \theta_j(X'') \times a_j. \tag{3}$$

Так как в формуле (3) функции θ_j неизвестные и подлежат нахождению, то, не нарушая общности, положим

$$h_i(X'') = \sum_{j=0}^{M_i-1} \theta_j(X''). \tag{4}$$

Сложность разложения функции определим количеством слагаемых $M \le k'$, а под сложностью представления будем понимать количество операций L, необходимых для вычисления функции по ее разложению (2). Для получения минимальной сложности представления функции f воспользуемся степенями свободы, имеющимися при разделении переменных и выборе функций g_i и h_i.

2. Аналитическая конструкция

При декомпозиции дискретных функций используются различные аналитические конструкции, задающие строение синтезируемых формул. Основное их назначение – упорядочить процесс синтеза формул, сделать его регулярным и предсказуемым.

Наибольшее применение получили такие аналитические конструкции формул, как дизъюнктивная и конъюнктивная, а также их предельный случай – совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы. Известны также аналитические конструкции формул, представленные полиномом Жегалкина, формой Рида-Малера, секвенциальной формой, арифметическим и арифметико-логическим полиномом Малюгина, литеральной формой Яблонского и интервальной формой Мак-Класки, формами Радемахера, Уолша, Хаара, Виленкина-Крестенсона и др.

По своей сути каждая аналитическая конструкция является некоторой декомпозиционной схемой, в рамках которой ищется формульное представление декомпозируемой функции. Многообразие аналитических конструкций является следствием попыток синтеза эффективных представлений для ограниченных классов функций. Очевидно, что для каждой из известных форм могут быть найдены функции, имеющие в этих формах наиболее компактное представление, так же как и функции, представляемые с наибольшей сложностью. Поставим целью обобщить известные аналитические конструкции формул и синтезировать конструкцию, имеющую максимальную выразительную способность.

Воспользуемся бесповторной бесскобочной аналитической конструкций формул для g_i (θ_j),

$$g_i(X') = x'_0 \circ_1 x'_1 \circ_2 \ldots \circ_{n-1} x'_{n'-1}, \tag{5}$$

где $\circ_t$ ($t = \overline{1, n'-1}$) – искомые бинарные операции. В работе [7] показано, что использование конструкции (5) не нарушает общности разложения (2) и (4).

3. Спектральный синтез

Приведем методику спектрального синтеза формул. Описываемая методика близка декомпозиции в базисе произвольной сложности, осуществляемой путем замены выходных функций, предложенной Пархоменко [8] и Горовым [9]. Однако, благодаря матричному представлению функций и вычислению операций аналитической конструкции (5), при спектральном синтезе обеспечена быстрая сходимость декомпозиции [10].

Спектральная алгебра. Спектральным будем называть представление (4), в котором используется алгебра $A = < N_k, + >$ с одной операцией – сложением, причем такой, что для любых a и b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение относительно x на множестве N_k. Последнее означает, что матрица операции сложения не имеет повторяющихся элементов в любой из ее строк. Заметим, что требование ассоциативности на операцию спектральной алгебры не накладывается, если порядок вычисления операция будет соответствовать естественному. Если предполагается операции синтезированной формулы вычислять в произвольном порядке, то сложение должно быть ассоциативной и коммутативным операцией.

Покажем методику спектрального синтеза на примере. Пусть требуется найти формулу для вычисления первых 24 десятичных цифр числа $\pi = 3.14159265358979323846265$, взятых по модулю 3. В этом случае вектор значений функции $\mathbf{F} = [011120202022010020210202]$. Зададим вектор значностей переменных $\mathbf{K} = [2223]$, а алгебру A операцией сложения по модулю 3.

Матричное представление. Найдем бесповторное бесскобочное представление искомой функции,

$$
\begin{array}{c} \\ x_0 \\ \end{array}
\begin{array}{cc} & x_1 \\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \circ_1 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\ & \circ_2 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_3 \end{array}
= f(X). \qquad (6)
$$

Проверкой убеждаемся, что вычисление вектора функции f по найденному бесповторному представлению (6) дает исходный вектор $\mathbf{F}$.

Редукция операций. Следующим шагом спектрального синтеза является редукция операций бесповторной формы (6), которая заключается в следующем. Находятся классы эквивалентности строк каждой из матриц операций, начиная с последней. Затем каждая матрица операций преобразуется к виду, содержащему по одной строке из каждого класса, а предыдущая операция модифицируется таким образом, чтобы вычисляемая функция осталась неизменной. Процесс редукции завершается, если все матрицы, кроме первой, редуцированы. Первая матрица формы не нуждается в редукции, так как количество ее строк всегда равно значности первой переменной.

Выполним редукцию бесповторной формы функции из примера. Находим, что количество классов эквивалентности строк последней операции $\circ_3$ равно 7: $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3\}$, $C_4 = \{4,6\}$, $C_5 = \{5\}$, $C_6 = \{7\}$. Так как значность спектральной алгебры у нас равна 3, то мы должны использовать только три класса эквивалентности C_0, C_1 и C_4, покрывающих наибольшее число строк операции $\circ_3$. После замены элементов матрицы $\circ_2$ на соответствующие номера новых строк последней операции , получим

$$
x_0
\begin{array}{cc} & x_1 \\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \circ_1 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & * \\ * & 2 \\ * & * \end{bmatrix} \\ & \circ_2 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \circ_3 \end{array},
$$

где звездочкой обозначены элементы, которые могут принимать произвольные значения. После редукции операции $\circ_2$ имеем

$$
x_0
\begin{array}{cc} & x_1 \\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\ & \circ_1 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_2 \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} & x_3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \circ_3 \end{array}
= \theta(X).
$$

Заметим, что полученная форма содержит неопределенные значения, которые на следующих шагах декомпозиции могут быть использованы для минимизации итоговой формулы.

Вычисление остатка. Если в процессе редукции окажется, что редуцированная форма функции не равна исходной, т.е. $f(X) \neq \theta(X)$, то вычисляется остаточный вектор $\mathbf{F}'$,

$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ – вектор функции, полученной в результате полной редукции $\mathbf{F}$. Для этого в алгебре A решаются уравнения вида $\theta_i + f_i' = f_i$ относительно неизвестных f_i' при $i = \overline{0, m-1}$.

После доопределения $\theta(X)$, вычисление найденной формы дает следующий вектор значений, $\mathbf{T} = [012020222002020020020200]$. В результате решения найденных уравнений получаем остаточный вектор $\mathbf{F}' = [002100010020020000220002]$.

На следующем шаге спектрального синтеза полученный вектор $\mathbf{F}'$ используется как вектор исходной функции. Синтез завершается, когда полная редукция функции равна самой редуцируемой функции, т.е. когда $\mathbf{F} = \mathbf{T}$.

Перестановка переменных. Описанный выше итерационный алгоритм последовательного приближения чувствителен к порядку переменных. По этой причине для минимизации числа классов эквивалентности будем изменять порядок переменных при синтезе формул спектральных функций. Для вычисления вектора функции, полученной после изменении порядка переменных, будем использовать взаимно-однозначное соответствие между значением номера элемента вектора и значениями переменных.

Найдем наилучший порядок переменных для редукции рассматриваемой функции. Для этого вычислим вектора значений функции при различных последних переменных и найдем наилучшее покрытие S матрицы последней операции k строками. Вычисления показывают, что максимум S достигается при порядке переменных $[x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$. Получим функцию $\theta_1(X)$,

$$\begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \circ_{11} & \circ_{12} & \circ_{13} \end{array} = \theta_1(X)$$

и соответствующий ей остаточный вектор $\mathbf{F}_1 = [022100122121200012200002]$. После редукции $\mathbf{F}_1$ с учетом определяемого порядка переменных получаем вторую функцию $\theta_2(X)$, вектор которой совпадает с исходным вектором $\mathbf{F}_1$,

$$\begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_{21} & \circ_{22} & \circ_{22} \end{array} = \theta_2(X).$$

Окончательно имеем: $\mathbf{F} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, $f(X) = \theta_1(X) + \theta_2(X)$ и

$$f(X) = x_3 \circ_{11} x_0 \circ_{12} x_1 \circ_{13} x_2 + x_3 \circ_{21} x_0 \circ_{22} x_1 \circ_{23} x_2,$$

где в результате проведенного синтеза вычислены используемые в формуле операции.

4. Оптимальное разделение переменных

Для аналитического синтеза формул в рамках конструкции (2) выполним оптимальное разделение переменных X на два непересекающихся множества X' и X'' таких, что

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n'-1} k_i' - \sum_{j=0}^{n''-1} k_j''\right) \approx \rho_{опт}, \qquad (7)$$

где $\rho_{опт}$ – результат решения уравнения $\rho n = \bar{k}\log_{\tilde{k}}(0{,}5(k-\alpha)(\bar{k}n - 2\beta + \rho n))$, а $\bar{k}$ ($\tilde{k}$) – соответственно средняя арифметическая и средняя геометрическая значность переменных X, $\beta = 2\bar{k} - \bar{k}^2/(k-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ – константы, характеризующие аналитическую конструкцию (5)

[7]. На рис. 1 приведена зависимость оптимального значения $\rho_{опт}$ от количества переменных при их одинаковых значностях.

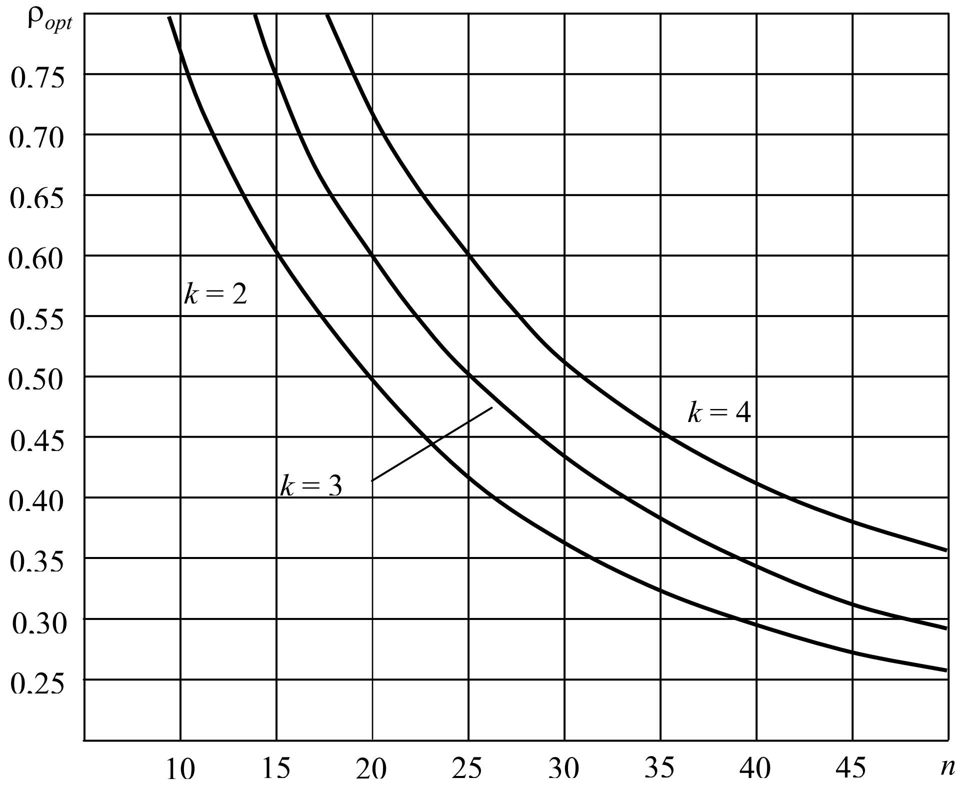

Рис. 1. Оптимальное разделение переменных.

5. Аналитический синтез

Аналитический синтез выполняется в две стадии. На первой стадии разложение (2) записывается в матричном виде $\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{H}$ таком, что

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{F} \;\vdots\; \mathbf{0}\right] \times \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ - \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где размерность матрицы $\mathbf{G}$ равна $k' \times k'$, размерность матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ равна $k' \times k''$, $k' > k''$, а $\mathbf{I}$ ($\mathbf{0}$) – единичная (нулевая) подматрица.

Далее ищутся такие линейные комбинации столбцов матрицы $\mathbf{F}$, которые представимы бесповторными бесскобочными формулами. Каждая такая комбинация заменяет один из ненулевых столбцов матрицы $\mathbf{G}$. Существование необходимого количества таких линейных комбинаций обеспечивается оптимальным разделением переменных (7). Для сохранения равенства произведения матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ матрице функции $\mathbf{F}$ соответствующему преобразованию подвергаются и ненулевые строки матрицы $\mathbf{H}$. В итоге из представления (8) получаем

$$\mathbf{F} = \left[\widetilde{\mathbf{G}} \;\vdots\; \mathbf{0}\right] \times \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{H}} \\ - \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{G}} \times \widetilde{\mathbf{H}} \tag{9}$$

где столбцы подматрицы $\widetilde{\mathbf{G}}$ являются векторами функций g_i, которые представимы бесповторными бесскобочными формулами вида (5).

На второй стадии функции h_i, составляющие строки подматрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$ из (9), подвергаются спектральному синтезу. Окончательно получаем для функции с длиной вектора m и количеством переменных n разложение вида (2), для которого справедливы следующие оценки, имеющие место не только в асимптотической области, но и при конечном числе переменных [7]:

$$M = C^2 \frac{m}{n^2},\; L = C^2 \frac{m}{n},\; C = \frac{1}{k-\alpha} \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - 2\beta\right)\right)^2 - \rho^2}}.$$

При аналитическом синтезе необходимо обеспечить разделение переменных, такое, что выполняется условие (7). Однако при небольшой длине вектора функции, эта задача трудновыполнима, так как дискретность значностей переменных не позволяют выполнить их оптимальное разделение. Например, минимальная длина вектора булевой функции, при которой возможно оптимальное разделение ее переменных, равна 512.

Таким образом, показать методику синтеза на примерах столь большой размерности не представляется возможным. Поэтому рассмотрим демонстрационный пример меньшей размерности. Для этого синтезируем формулу для вычисления 48 десятичных цифр числа π по модулю 3,

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937,$$

т.е. вектор значений функции с переменными значности $[32222]$ равен

$$[011120202022010020212221002021020222110110000001].$$

Разделим переменные на два непересекающихся множества $X' = \{x_0, x_1, x_2\}$ и $X'' = \{x_3, x_4\}$. Представим функцию ее аналитическим разложением (8), выполненном в конечном поле, образованном операциями сложения и умножения по модулю 3. В матричной форме разложение имеет вид $\mathbf{G} \times \mathbf{H} = \mathbf{F}$ (рис. 2).

Найдем теперь такие линейные комбинации столбцов матрицы $\mathbf{F}$, которые представимы бесповторными бесскобочными формулами,

$$\begin{cases} \mathbf{G}_0 \times h_{00} + \mathbf{G}_1 \times h_{01} + \mathbf{G}_2 \times h_{02} + \mathbf{G}_3 \times h_{03} = \mathbf{F}_0; \\ \mathbf{G}_0 \times h_{10} + \mathbf{G}_1 \times h_{11} + \mathbf{G}_2 \times h_{12} + \mathbf{G}_3 \times h_{13} = \mathbf{F}_1; \\ \mathbf{G}_0 \times h_{20} + \mathbf{G}_1 \times h_{21} + \mathbf{G}_2 \times h_{22} + \mathbf{G}_3 \times h_{23} = \mathbf{F}_2; \\ \mathbf{G}_0 \times h_{30} + \mathbf{G}_1 \times h_{31} + \mathbf{G}_2 \times h_{32} + \mathbf{G}_3 \times h_{33} = \mathbf{F}_3, \end{cases}$$

где h_{ij} – искомые коэффициенты, $\mathbf{G}_i$ – столбцы матрицы $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}_i$ – столбцы матрицы $\mathbf{F}$.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccccccc} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&2&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&1&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ \hdashline 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 0&0&0&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&0&2&0 \\ 1&0&0&1 \\ 2&2&2&1 \\ 0&0&1&0 \\ 2&2&0&0 \\ 0&1&2&0 \\ 2&2&0&0 \\ 0&2&2&0 \\ 2&2&2&0 \\ 2&1&2&1 \end{array}\right]$$

Рис. 2. Начальное представление.

Для заданной в примере функции методом перебора различных линейных комбинаций столбцов $\mathbf{F}_i$ находим коэффициенты h_{ij},

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

при которых столбцы матрицы $\widetilde{\mathbf{G}}$ имеют бесповторную бесскобочную форму. Отсюда имеем новое матричное разложение функции $\widetilde{\mathbf{G}} \times \widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{F}$ (рис. 3), у которого столбцы $\widetilde{\mathbf{G}}_i$ являются векторами значений $g_i(X')$ и представляются формулами:

$$g_0(X') = x_0 \circ_{01} x_1 \circ_{02} x_2, \quad \circ_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \circ_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$g_1(X') = x_0 \circ_{11} x_1 \circ_{12} x_2, \quad \circ_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \circ_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$g_2(X') = x_0 \circ_{21} x_1 \circ_{22} x_2, \quad \circ_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \circ_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$g_3(X') = x_0 \circ_{31} x_1 \circ_{32} x_2, \quad \circ_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \circ_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В итоге получаем следующее разложение искомой функции:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{3} (x_0 \circ_{i1} x_1 \circ_{i2} x_2) \times (x_3 \circ_{i3} x_4).$$

а после спектрального синтеза функций $h_i(X'') = x_3 \circ_{i3} x_4$, найдем и операции $\circ_{i3}$:

$$\circ_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \circ_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \circ_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \circ_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления 48 десятичных цифр числа π по модулю 3 требуется выполнить 18 операций.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Итоговое представление.

Заключение

Таким образом, при аналитической декомпозиции, в отличие от разделительной, не требуется проверять все варианты разделения переменных. Минимизация числа ненулевых коэффициентов обеспечивается оптимальным их разделением, при котором гарантируется бесповторное представление синтезируемых подформул. В отличие от алгебраического подхода, основанного на получении формулы функции и тождественных ее преобразованиях, при аналитической декомпозиции возможен прямой синтез эффективного представления. При этом существует возможность применить хорошо разработанный аппарат линейной алгебры. В итоге имеем, что при аналитической декомпозиции возможен синтез эффективных формульных представлений дискретных функции. Однако трудоемкость такого синтеза достаточно высока.

Литература

1. *Шеннон К.Э.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Лупанов О.Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем. М.: Физматгиз, 1963. Вып. 10. С. 63-97.
3. *Кузьмин В.А.* Оценка сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Новосибирск: 1976. Вып. 29. С. 24-36.
4. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.
5. *Lee C.Y.* Representation of switching circuits by binary decision programs // Bell System Technical Journal. 1959. Vol. 38, No. 4. P. 985.
6. *Карповский М.Г., Москалев Э.С.* Реализация частично-определенных функций алгебры логики с помощью разложения в ортогональные ряды // Автоматика и телемеханика. 1970. № 8.
7. *Выхованец В.С.* Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 20-56.
8. *Пархоменко П.П.* Синтез релейных структур на различных функционально полных системах логических элементов // Автоматика и телемеханика. 1964. № 6.
9. *Горовой В.Р.* Синтез релейных структур методом замены выходных функций // Автоматика и телемеханика. 1967. № 1. С. 112-121.
10. *Vykhovanets V.S.* Optimal Spectral Expansion for Discrete Control // Proceedings of 17th IFAC Word Congress. Seoul, 2008. PP. 7516-7521.