УДК 519.711.2

СПЕКТРАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В.С. Выхованец
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: valery@vykhovanets.ru

Ключевые слова: дискретная идентификация, дискретная декомпозиция, синтез формул, сложность формул.
Key words: discrete identification, discrete decomposition, formulas synthesis, complexity of formulas

Рассмотрена идентификация дискретных систем, сведенная к функциональной декомпозиции дискретных функций, где под декомпозицией понимается представление функции формулой в базисе бинарных операций. Описана процедура синтеза формул, основанная на вычислении бинарных операций. Даны как точные, так и асимптотические оценки сложности синтезируемых моделей.
SPECTRAL IDENTIFICATION OF DISCRETE SYSTEMS / V.S. Vykhovanets (Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117997, Russia, E-mail: valery@vykhovanets.ru). The consideration is given to the identification of discrete systems, which is reducible to the functional decomposition of discrete functions, where the decomposition is meant the representation of a function by a formula in the basis of binary operations. A procedure of formulas design is based on a computation of the binary operations. Both exact and asymptotic complexity estimates of the designed models are given.

1. Введение

При решении задач управления, изучении новых процессов, анализе экономических систем широко применяются математические модели. Известны два способа формирования математических моделей. В первом способе исследуемая система расчленяется на такие подсистемы, свойства которых очевидны из ранее накопленного опыта. В этом случае выбор типа модели, как правило, диктуется регулятивными основаниями деятельности специалиста-эксперта, описывающего ту или иную предметную область. Большую роль в этом процессе играет анализ экспериментальных данных с целью уточнения исходных предпосылок или получения дополнительных сведений об изучаемых объектах. Формальное математическое объединение этих подсистем становится моделью всей системы.

В другом способе построения моделей непосредственно используются экспериментальные данные. В этом случае ведётся регистрация входных и выходных сигналов некоторого объекта, а его модель формируется в результате обработки соответствующих данных. Этот способ связан с решением задачи идентификации, заключающейся в следующем: по результатам наблюдений за входными и выходными переменными объекта построить оптимальную в некотором смысле его модель.

В силу отсутствия общепринятых подходов к проблеме идентификации на первый план выходит интуиция и опыт исследователя. В связи с этим особую актуальность начинают приобретать алгоритмы и методы анализа данных различной природы, причем этот анализ становится составной и, более того, неотъемлемой частью самого процесса идентификации.

Следует отметить, что в конце прошлого века сформировалось направление информационная идентификация и были предложены адаптивные алгоритмы, основанные на статистическом подходе к априорному анализу данных [1]. Но многие объекты и процессы не укладываются в предложенную парадигму и требуют применения функционально-множественного подхода к синтезу моделей в системах управления [2]. Последнее направление развивается в рамках гарантированного оценивания исходя из анализа доступных наблюдению априорных и экспериментальных данных [3]. Здесь также предложено множество подходов и алгоритмов. Но несмотря на это проблема синтеза моделей, наиболее полно учитывающих реальные условия функционирования объекта, еще далека от своего окончательного решения.

Таким образом, существует класс задач идентификации, для эффективного решения которых не применимы известные методики моделирования, базирующиеся на некоторых гипотезах о структуре и функционировании идентифицируемых объектов. Решение таких задач основывается на дискретной обработке данных, для описания которой использование априорных предположений не представляется возможным ввиду отсутствия содержательной интерпретации анализируемых данных. Такие задачи возникают в тех областях, характерной особенностью которых является представление исходных и результирующих данных в виде таблиц (векторов, двумерных и многомерных массивов и других однородных структур данных).

Настоящая статья посвящена исследованию спектральной декомпозиции дискретных функций в наиболее общей постановке задачи, когда с целью получения точных и эффективных математических моделей переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, а выбор дискретных операций не ограничен каким-либо их подмножеством.

2. Содержательная постановка задачи

Задачу идентификации дискретной системы, заданной в табличной форме, сведем к декомпозиции дискретных функций путем их представления в виде формул, состоящих из переменных и операций над ними. Дискретная функция f от n переменных $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ со значностями $K=\{k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}\}$ и длиной характеристического вектора m может быть представлена в виде спектрального разложения

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m-1} g_i(X)\times h_i \tag{1}$$

по системе функций g_i с коэффициентами h_i. В отличие от спектральных разложений, у которых система из m спектральных функций g_i задается заранее, до идентификации, поставим задачу поиска такого минимального множества функций $\{g_i\}$, которые достаточны для представления идентифицируемой функции f. Так как функции g_i предполагаются неизвестными, то без потери общности разложение (1) может быть представлено как

(2) $$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1} g_i(X),$$

где $M \le m$. Заметим, что в формуле (2) используется алгебраическая система $A=<N_f,+>$ с одно операцией – сложением, заданной на дискретном множестве N_f, включающем множество значений идентифицируемой функции f.

Введем дополнительные ограничения на вид функций g_i. В противном случае, без таких ограничений, модель (2) будет иметь тривиальное представление: $M=1$ и $g_0=f$. Указанные ограничения определим исходя из требования эффективной вычислимости модели, что выражается в использовании для представления спектральных функций g_i формул с произвольными бинарными операциями над переменными,

(3) $$g_i(X)=x_0 \circ_{i,1} x_1 \circ_{i,2} x_2 \ldots \circ_{i,n-1} x_{n-1},$$

где $\circ_{i,j}$ – искомые бинарные операции.

3. Основные определения

Для дискретного кодирования данных выберем в качестве универсального множество целых чисел $N_0=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$. Когда необходимо задать конечное множество из k элементов, будем использовать подмножество N_k этого множества, $N_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$, где $k>0$ – количество элементов в N_k.

3.1. Дискретные функции

Функция f одной переменной x, заданная на множестве N_k и принимающая значения на множестве N_f, есть отображение N_k в N_f такое, что каждый элемент x области определения N_k связан не более чем с одним элементом $y=f(x)$ области значений N_f. Число k назовем значностью переменной, а k_f – значностью функции. Функция является дискретной, если ее область определения и область значений – конечные множества.

Пусть функция f задана на множестве $N_{k_0}\times N_{k_1}\times\ldots\times N_{k_{n-1}}$ и принимает значения на множестве N_f, где $\times$ – знак декартова произведения множеств. В этом случае функция зависит от n переменных x_0, x_1, …, x_{n-1} со значностями k_0, k_1, …, k_{n-1} соответственно, т.е. $y=f(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$, где $y\in N_f$, а $x_j\in N_{k_j}$ ($j=\overline{0,n-1}$).

Произвольная дискретная функция f задается вектором значений $\mathbf{F}=[f_0\ f_1\ldots f_{m-1}]$ длины m и вектором значностей переменных $\mathbf{K}=[k_0\ k_1\ldots\ k_{n-1}]$ длины n, причем $m=k_0k_1\ldots k_{n-1}$, где для обозначения векторов использованы квадратные скобки. Если функция задана только вектором $\mathbf{F}$, то существует множество векторов $\mathbf{K}$, которые могут быть использованы для доопределения функции.

Если учесть, что дискретная функций определяется не только вектором значений, но и значностями переменных, то один и тот же вектор функции на разных наборах таких значностей образует различные функции. Количество таких векторов равно количеству представлений числа m в виде произведения целых чисел, больших единицы.

Функцию, заданную только вектором значений длины m, будем называть m-функцией. Для исходного описания дискретной функции будем использовать табличную форму с числом строк, равным длине вектора функции $m = k_0 k_1 \dots k_{n-1}$.

3.2. Система счисления

Установим взаимно однозначное соответствие между значением переменной $x \in N_m$ и значениями переменных $x_j \in N_{k_j}$ путем представления числа x в n-разрядной позиционной системе счисления с основаниями, определяемыми значностями переменных.

Представлением числа x в n-разрядной позиционной системе счисления с основаниями k_0, k_1, …, k_{n-1} называется упорядоченное множество из n чисел, или цифр,

(4) $$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})_{k_0\, k_1 \dots k_{n-1}}$$

таких, что

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w_j\,,\ w_j = \prod_{t=0}^{j-1} k_t$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, k_j - 1\}$ – j-я цифра числа x с весом w_j, причем цифра x_0 имеет наименьший вес w_0, равный единице.

Для прямого и обратного преобразования числа x в его представление в системе счисления с различными основаниями цифр (4) воспользуемся следующими рекуррентными правилами:

$$x(0) = x\,,\quad \left.\begin{aligned} x_t &= x(t) \bmod k_t \\ x(t+1) &= x(t)\ \operatorname{div}\ k_t \end{aligned}\right\}\ (t = \overline{0, n-2}), x_{n-1} = x(n-1)\,;$$

$$x(n-1) = x_{n-1}\,,\ x(t-1) = x(t)k_{t-1} + x_{t-1}\ \ (t = \overline{n-1, 1}\ ),\ x = x(0)\,,$$

где $x(t)$ – временная переменная, изменяющая свое значение на каждой итерации t, mod обозначает остаток, а div – целую часть от деления первого операнда на второй.

Пусть функция заданна вектором значений $\mathbf{F}$ и вектором значностей переменных $\mathbf{K}$. Тогда выражение

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})_{k_0\, k_1 \dots k_{n-1}}\,,$$

равно значению функции, когда переменные принимают значения x_0, x_1, …, x_{n-1}, а переменная x, равная номеру элемента вектора $\mathbf{F}$, представлена в позиционной системе счисления с основаниями $\mathbf{K}$. В этом случае выражение $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ читается как последовательность цифр числа x в этой системе счисления, причем в этой записи первая цифра имеет наименьший вес.

3.3. Дискретные операции

При дискретной обработке преобразование входных данных в выходные происходит путем выполнения унарных, бинарных, тернарных и других операций.

Операцией называется функция, существенно зависящая от своих переменных. Местность операции определяется числом операндов (переменных), участвующих в формировании результата операции. Очевидно, если результат n-местной операции не зависит от одного из операндов, такую операцию следует рассматривать как ($n-1$)-местную.

Унарная операция может быть определена вектором, а бинарная – матрицей. Вектор $[y_0\, y_1 \ldots y_{k_0-1}]$ длины k_0, обозначаемый также как $[y_i \mid i = \overline{0, k_0-1}]$, или $[y_i]$, задает унарную операцию, а единственный операнд этой операции имеет значность k_0. Матрица размерности $k_0 \times k_1$, обозначаемая как $[y_{i\,j} \mid i = \overline{0, k_0-1},\, j = \overline{0, k_1-1}]$, или $[y_{i\,j}]$, является матрицей бинарной операции, если она содержит хотя бы одну строку (столбец), отличную от остальных строк (столбцов). В этом случае первый операнд имеет значность k_0, а второй – k_1.

Пусть унарная операция $\neg$ и бинарная операции $\circ$ заданы вектором $[y_i]$ и матрицей $[y_{i\,j}]$ соответственно. Обозначим применение унарной операции $\neg$ к переменной x как $\neg x = [y_i](x) = y_x$, а бинарной операции $\circ$ к переменным x и z как $x \circ z = [y_{i\,j}](x, z) = x[y_{i\,j}]z = y_{x\,z}$.

4. Аналитическая конструкция

При декомпозиции дискретных функций используются различные аналитические конструкции, задающие строение синтезируемых формул. Основное их назначение – упорядочить процесс синтеза формул, сделать его регулярным и предсказуемым. По своей сути каждая аналитическая конструкция является некоторой декомпозиционной схемой, в рамках которой ищется формульное представление декомпозируемой функции.

Многообразие аналитических конструкций является следствием попыток синтеза эффективных представлений для ограниченных классов функций. Очевидно, что для каждой из известных форм могут быть найдены функции, имеющие в этих формах наиболее компактное представление. Поставим целью обобщить известные аналитические конструкции формул и синтезировать конструкцию, имеющую максимальную выразительную способность.

4.1. Значность конструкции

Рассмотрим предельно общую аналитическую конструкцию, состоящую из всех возможных унарных и бинарных операций с произвольными значностями как своих операндов, так и результата операции и произвольной расстановкой скобок, задающих порядок вычисления. Будем предполагать, что переменные, входящие в аналитическую конструкцию, также могут иметь произвольную значность. Ввиду того, что основной целью синтеза является аппаратурная или программно-аппаратная реализация дискретных функций по получаемым при синтезе формульным представлениям, ограничим диапазон возможных значностей переменных и операций некоторым фиксированным числом k, которое назовем значностью аналитической конструкции.

Ограничение значности аналитической конструкции диктуется практическими соображения, связанными с возможностью выполнения многозначных операций и доступа к многозначным данным (переменным) на вычислительном средстве, для которого синтезируется формульное представление.

Очевидно, чем больше значность аналитической конструкции, тем при прочих равных условиях, может быть получено более компактное представление. Однако значность операций должна согласовываться со значностью переменных, которая зачастую является фиксированной и определяется из содержательных представлений о решаемой задаче.

4.2. Классы формул

Произвольную формулу будем характеризовать количеством переменных и количеством операций, из которых она состоит. Это количественные характеристики формулы. К качественным характеристикам отнесем наличие скобок, изменяющих естественный порядок вычисления, и повторную входимость переменных, определяющую частоту обращений к одной и той же переменной при вычислениях.

По входимости переменных все формулы будем разделять на повторные, у которых одна и та же переменная может присутствовать более одного раза, и бесповторные, – когда каждая переменная встречается один раз или не встречается ни разу.

Под бесскобочными формулами будем понимать такие формулы, в которых операции над переменными выполняются слева направо в естественном порядке их записи при приоритете унарных операций над бинарными. В таких формулах скобки могут быть опущены.

В скобочных формулах порядок вычислений отличается от естественного. Это приводит к необходимости сохранять промежуточные результаты вычисления всех или части подформул, заключенных в скобки.

Таким образом, следует различать четыре класса формул: повторные скобочные, повторные бесскобочные, бесповторные скобочные и бесповторные бесскобочные. Рассмотрим особенности применения при алгебраической декомпозиции формул из различных классов.

4.3. Повторная входимость

Необходимость разделения формул на повторные и бесповторные вызвана тем, что от этого существенным образом зависит сложность их программной или аппаратной реализации.

При аппаратной реализации бесповторных формул трассировка данных от места хранения переменной до места ее обработки осуществляется к единственному входу логического элемента. В то время как для повторных формул такая трассировка требуется для многих элементов. При программной реализации повторные формулы приводят к многократному обращению к ячейкам памяти, где хранятся переменные. Вычисление же бесповторной формулы приводит к единственной выборке данных из входных ячеек.

При спектральной декомпозиции имеется возможность выбора как различных спектральных алгебр, так и спектральных функций как с существенно, так и с несущественной зависимостью от части переменных. Последнее позволяет синтезировать формулы как с повторными вхождениями переменных, так и с отсутствием вхождения всех или части переменных.

Следовательно, вхождение в аналитическую конструкцию одной и той же переменной более одного раза приводит к принципиальной неотличимости синтезируемых формул от выражений, получаемых в результате спектральной декомпозиции. Если же разрешить повторные вхождения переменных, то для представления спектральных функций в виде формул необходим такой же или более общий аппарат функциональной декомпозиции. Это приводит к невозможности завершить декомпозицию, если, конечно, формулы не заданы заранее.

Таким образом, повторные вхождения переменных в аналитическую конструкцию формул не только не улучшают выразительные свойства спектральной декомпозиции, но и приводят к некоторой избыточности. Не нарушая общности, потребуем отсутствия повторных вхождений одной и той же переменной в аналитические конструкции спектральных функций.

4.4. Унарные операции

Исследуем возможность использования бесповторных формул с различной расстановкой скобок. Рассмотрим наиболее общую бесповторную аналитическую конструкцию спектральных функций, заданную с точностью до расстановки скобок и порядка вхождения переменных,

(5) $$g_i(X) = \neg_{i,0} x_0 \bullet_{i,1} \neg_{i,1} x_1 \bullet_{i,2} \cdots \bullet_{i,n-1} \neg_{i,n-1} x_{n-1},$$

где $\neg_{i,j}$ – произвольные унарные операции, $\bullet_{i,j}$ – произвольные бинарные операции, x_i – переменные из множества X.

Выполним тождественные структурные преобразования конструкции формулы (5) путем копирования и перестановки строк матриц бинарных операций, определяемых элементами матриц унарных операций. В результате таких преобразований получаем минимальную формулу функции

(6) $$g_i(X) = x_{i,0} \circ_{i,1} x_{i,1} \circ_{i,2} \cdots \circ_{i,n'-1} x_{i,n'-1},$$

заданную с точностью до расстановки скобок, из которой исключены унарные операции и, возможно, несущественные переменные ($n' \leq n$).

Пример 1. Пусть спектральная функция задана формулой

$$g(x_0, x_1, x_2) = \neg_0 x_0 \circ_1 (\neg_1 x_1 \circ_2 \neg_2 x_2),$$

где унарные и бинарная операции определены матрицами

$$\neg_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \neg_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \neg_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \circ_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \circ_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполним тождественные преобразования этой формулы и получим ее минимальную (каноническую) форму. Исходная конструкция формулы имеет вид

$$g(X) = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 \right).$$

Отсюда находим, что переменные x_0 и x_1 имеют значность 3, а переменная x_2 – значность 2. Далее, унарная операция $\neg_1$ эквивалентна такому преобразованию бинарной операции $\circ_2$, при котором на первое месте стоит строка 1, на втором месте – строка 0, а в третье место копируется строка 1 исходной матрицы. В результате описанных тождественных преобразований имеем

$$g(X)=x_0\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x_2\right).$$

В свою очередь унарная операция $\neg_2$ эквивалентна перестановке столбцов матрицы операции $\circ_2$,

$$g(X)=x_0\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}x_2\right).$$

Проанализируем полученную бинарную операцию $\circ_2$ (в круглых скобках). Находим ее значность, равную 2. Следовательно, в первой бинарной используются только первые два столбца,

$$g(X)=x_0\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&1\end{bmatrix}\left(x_1\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}x_2\right).$$

В свою очередь унарная операция $\neg_0$ вызывает перестановку строк (120) бинарной операции $\circ_1$,

$$g(X)=x_0\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix}\left(x_1\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}x_2\right)$$

В итоге имеем $f(x_0,x_1,x_2)=x_0\circ_1(x_1\circ_2 x_2)$, где

$$\circ_1=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix},\ \circ_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

В результате получена минимальная формула исходной функции в классе произвольных бинарных операций. ♦

Таким образом, при произвольном выборе бинарных операций использование унарных операций в аналитической конструкции спектральных функций является избыточным.

4.5. Расстановка скобок

При реализации скобочных формул порядок вычислений отличается от естественного. Аппаратная реализация бесскобочных формул осуществляется в виде каскадных (линейных) схем. В то время, как реализация скобочных формул приводит к схеме общего вида. В свою очередь вычисление скобочных формул требует использования промежуточных ячеек памяти. В противоположность этому, бесскобочная форма может быть вычислена сразу, без сохранения промежуточных результатов.

Следует заметить, что использование в аналитической конструкции (6) скобок, изменяющих естественный порядок ее вычисления также приводит к принципиальной неотличимости синтезируемых формул от выражений, получаемых в результате спектральной декомпозиции (2). Однако, в этом случае нам следует отказаться от использования одной и той же операции сложения при объединении спектральных функций, а поиск формулы осуществлять в более общей форме

(7) $$f(X) = g_0(X) \oplus_1 g_1(X) \oplus_2 \ldots \oplus_{M-1} g_{M-1}(X),$$

при синтезе которой ставится задача не только вычисления операций спектральных функций g_i, но и необходимого множества спектральных алгебр $A_i =< N_f, \oplus_i >$.

5. Спектральный синтез

В развитие результатов, опубликованных в работе [4], приведем методику синтеза формул вида (7), в которой спектральные функции представляются бесповторными бесскобочными формулами с конструкцией (6). Основной операцией спектрального синтеза является представление вектора функции в виде композиции операций, задаваемых в матричном виде.

5.1. Матричное представление

Пусть задан вектор значений функции F длины m и вектора значностей переменных K длины n. Найдем $n-1$ матрицу операций $\circ_j$ ($j = \overline{1, n-1}$), таких, что $f(X) = g(X)$, где g – бесповторная бесскобочная функция вида (6).

Матрицы искомых операций $\circ_j$ вычислим по следующему рекуррентному правилу:

(8) $$\left.\begin{aligned} &K_j = k_j K_{j-1}, \\ &\circ_j = [p_{it}],\ p_{it} = i + tK_j \end{aligned}\right\}\ j = \overline{1, n-2},$$

где $K_0 = 1$, $i = \overline{0, K_{j-1} - 1}$, $t = \overline{0, k_{j+1} - 1}$ и

$$\left.\begin{aligned} &K_{n-1} = k_n K_{n-2}, \\ &\circ_{n-1} = [p_{it}],\ p_{it} = f_q,\ \ q = i + tK_{n-1} \end{aligned}\right\},$$

где f_q – элемент с номер q вектора F, $q = \overline{0, m-1}$. В результате для произвольной функции f получаем матрицы операций ее бесповторной бесскобочной формы, где значности операций $\circ_j$ больше чем заданная значность аналитической конструкции k.

Пример 2. Пусть требуется найти формулу для вычисления первых 24 десятичных цифр числа $\pi \approx 3.14159265358979323846265$ по модулю 3. В этом случае вектор значений функции $\mathsf{F} = [0111202020\,2201002021\,0202]$. Зададим вектор значностей переменных $\mathsf{K} = [2223]$.

Используя рекуррентное правило (8) находим бесповторное бесскобочное представление искомой функции,

$$f(X)=\; x_0 \begin{array}{cc} & x_1 \\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix} \\ & \circ_1 \end{array} \begin{array}{cc} & x_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}0&4\\1&5\\2&6\\3&7\end{bmatrix} \\ & \circ_2 \end{array} \begin{array}{cc} & x_3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&0\\1&2&2\\1&2&1\\2&0&0\\0&1&2\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix} \\ & \circ_3 \end{array}.$$

Из анализа конструкции получаем формулу функции, $f(X)=x_0 \circ_1 x_1 \circ_2 x_2 \circ_3 x_3$, заданную при различных значностях операций, изменяющихся от 3 до 7. Проверкой убеждаемся, что вычисление вектора функции f по найденному представлению дает исходный вектор $\mathbf{F}$. ♦

5.2. Редукция операций

Следующим шагом спектрального синтеза является редукция операций бесповторной формы функции, которая заключается в следующем.

Находятся классы эквивалентности строк каждой из матриц $\circ_j$, начиная с последней. Затем каждая матрица $\circ_j$ преобразуется к виду, содержащему по одной строке из каждого класса, а предыдущая операция модифицируется таким образом, чтобы вычисляемая функция осталась неизменной.

Пусть $\{C_0, C_1, \ldots, C_{u-1}\}$ – классы эквивалентности строк матрицы $\circ_j$, состоящие из номеров одинаковых строк, или совместимых строк, если строки содержат недоопределенные значения. Редуцированная матрица операции $\circ_j$ получается так: t-ая строка новой матрицы является строкой из класса эквивалентности C_t. Для сохранения равенства $f(X)=g(X)$ все элементы $c \in C_t$ матрицы операции $\circ_{j-1}$ заменяются на номер класса эквивалентности t. В итоге получаем модифицированную матрицу операции $\circ_{j-1}$ и матрицу $\circ_j$, не содержащую повторяющихся строк.

Процесс редукции завершается, если все матрицы, кроме первой, редуцированы. Первая матрица формы не нуждается в редукции, так как количество ее строк всегда равно значности первой переменной.

Пример 3. Выполним редукцию бесповторной формы функции из примера 2. Находим, что количество классов эквивалентности строк матрицы последней операции $\circ_3$ равно 7:

$$C_0=\{0\},\ C_1=\{1\},\ C_2=\{2\},\ C_3=\{3\},\ C_4=\{4,6\},\ C_5=\{5\},\ C_6=\{7\}.$$

После замены элементов 6 и 7 матрицы $\circ_2$ на элементы 4 и 6 соответственно, получим:

$$f(X)= \quad x_0\ \underset{\circ_1}{\overset{x_1}{\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_2}{\overset{x_2}{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix}0&4\\1&5\\2&4\\3&6\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_3}{\overset{x_3}{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&0\\1&2&2\\1&2&1\\2&0&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}}}.$$

Так как матрица операции $\circ_2$ не содержит одинаковых строк, то процесс редукции завершается. ♦

Если в процессе редукции число строк в матрице $\circ_j$ меньше или равно заданной значности аналитической конструкции k, то редукция является полной, в противном случае – частичной. Так как для синтеза формулы функции необходимо иметь функции с полностью редуцированными операциями, то в случае частичной редукции выберем только k классов эквивалентности и соответствующих им k строк, причем таких, что обеспечивается максимальное покрытие матрицы операции $\circ_j$. Если некоторая строка матрицы операции $\circ_j$ не принадлежит выбранному подмножеству их k классов, то вместо номера класса эквивалентности, соответствующего этой строке, используется неопределенное значение *.

Пример 4. Пусть значность аналитической конструкции $k=3$. Выполним полную редукцию функции из примера 3. После такой редукции операции $\circ_3$ имеем функцию $g(X)$, которая уже не равна исходной функции f,

$$g(X)= \quad x_0\ \underset{\circ_1}{\overset{x_1}{\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_2}{\overset{x_2}{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix}0&2\\1&*\\ *&2\\ *&*\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_3}{\overset{x_3}{\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}}}.$$

После полной редукции операции $\circ_2$ получаем

$$g(X)= \quad x_0\ \underset{\circ_1}{\overset{x_1}{\begin{array}{c}0\\1\end{array}\begin{bmatrix}0&2\\1&*\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_2}{\overset{x_2}{\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{bmatrix}0&2\\1&*\\ *&2\end{bmatrix}}}\ \ \underset{\circ_3}{\overset{x_3}{\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}}}.$$

Заметим, что полученная форма содержит недоопределенные значения, которые на следующих шагах декомпозиции могут быть использованы для минимизации итоговой формулы. ♦

5.3. Вычисление остатка

Если в процессе полной редукции окажется, что редуцированная форма функции не равна исходной, т.е. $f(X) \neq g(X)$, то вычисляется остаточный вектор $\mathbf{F}'$ такой, что $\mathbf{G}+\mathbf{F}'=\mathbf{F}$, где $\mathbf{G}$ – вектор функции, полученный в результате вычисления $g(X)$. Для этого задается некоторая алгебра $A=<N_k,+>$, в которой решаются уравнения вида $g_i+f_i'=f_i$ относительно неизвестных f_i', где g_i и f_i – элементы векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, $i=\overline{0,m-1}$.

На следующем шаге спектрального синтеза полученный вектор $\mathbf{F}'$ используется как вектор исходной функции. Синтез завершается, когда полная редукция функции равна самой редуцируемой функции, т.е. когда $\mathbf{F}=\mathbf{G}$.

Таким образом, спектральный синтез в целом может быть описан следующими рекуррентными формулами,

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0=\mathbf{F}; \\ \mathbf{F}_t=\mathbf{F}_{t-1}-\mathbf{G}_{t-1} \quad (t=\overline{1,M}); \\ \mathbf{F}_M=\mathbf{G}_M, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathbf{G}_M$ – точная редукция вектора $\mathbf{F}_M$.

Пример 5. Выполним вычисление остаточного вектора для функции из примера 4. После доопределения $g(X)$ нулевыми элементами,

$$g(X)= \quad x_0 \underset{\circ_0}{\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{x_1} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}} \quad \underset{\circ_1}{\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{x_2} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}} \quad \underset{\circ_2}{\begin{array}{c|ccc} & \multicolumn{3}{c}{x_3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}},$$

вычисление этой формы дает следующий вектор значений,

$$\mathbf{G}=[012020222002020020020200].$$

Теперь зададим спектральную алгебру $A=<N_3,+>$ операцией сложения,

$$+=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

у которой каждая строка не содержит двух одинаковых элементов из множества N_3, т.е. уравнение вида $a+x=b$ имеет единственное решения относительно x при любых a и b.

Отсюда получаем 24 уравнения в алгебре A,

$$0+f_0'=0,\ 1+f_1'=1,\ 2+f_2'=1,\ 0+f_3'=1,\ 2+f_4'=2,\ 0+f_5'=0,$$
$$2+f_6'=2,\ 2+f_7'=0,\ 2+f_8'=2,\ 0+f_9'=0,\ 0+f_{10}'=2,\ 2+f_{11}'=2,$$
$$0+f_{12}'=0,\ 1+f_{13}'=1,\ 0+f_{14}'=0,\ 0+f_{15}'=0,\ 2+f_{16}'=2,\ 0+f_{17}'=0,$$
$$0+f_{18}'=2,\ 2+f_{19}'=1,\ 0+f_{20}'=0,\ 2+f_{21}'=2,\ 0+f_{22}'=0,\ 0+f_{22}'=2,$$

где использован исходный вектор функции

$$\mathbf{F}=[011120202022010020210202].$$

В результате решения найденных уравнений получаем остаточный вектор $\mathbf{F}'$,

$$\mathbf{F}'=[002100010020020000220002]. \ \blacklozenge$$

5.4. Перестановка переменных

Описанный выше итерационный алгоритм последовательного приближения функции чувствителен к порядку переменных. По этой причине, для минимизации числа классов эквивалентности, будем изменять порядок переменных при синтезе формул спектральных функций.

Для вычисления вектора функции, полученной после изменении порядка переменных, будем использовать взаимно-однозначное соответствие между значением номера элемента вектора и значениями переменных, задаваемое представление числа в системе счисления с различными основаниями цифр (4). Заметим, что порядок предыдущих переменных не влияет на число классов эквивалентности строк матрицы текущей операции.

Пример 6. Найдем наилучший порядок переменных для редукции функции из примера 3. Для этого вычислим вектора значений функции при различных последних переменных и найдем наилучшее покрытие S матрицы последней операции k строками, где k – значность аналитической конструкции. Результаты вычисления при различных последних переменных формы приведены в таблице 1.

Таблица 1. Покрытие функции при перестановке переменных.

Вектор переменных $\mathbf{X}$	Вектор функции $\mathbf{F}$	Покрытие S
$[x_0\ x_1\ x_2\ x_3]$	[011120202022010020210202]	12
$[x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$	[022100122121200012200002]	18
$[x_2\ x_3\ x_0\ x_1]$	[022020100102122020102012]	18
$[x_1\ x_2\ x_3\ x_0]$	[012222002200110002100122]	16

Выбрав в качестве рабочего второй вариант, в соответствии с (9) получаем функцию $g_1(X)$ и остаточный вектор $\mathbf{F}_1$,

$$g_1(X) = \begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \circ_{11} & \circ_{12} & \circ_{13} \end{array},$$

$$\mathbf{F}_1 = [022100122121200012200002].$$

После редукции $\mathbf{F}_1$ с вычислением нового порядка переменных получаем вторую функцию $g_2(X)$, вектор которой совпадает с исходным вектором $\mathbf{F}_1$,

$$g_2(X) = \begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_{21} & \circ_{22} & \circ_{23} \end{array}.$$

Окончательно имеем:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2,$$

$$f(X) = g_1(X) + g_2(X),$$

$$f(X) = x_3 \circ_{11} x_0 \circ_{12} x_1 \circ_{13} x_2 + x_3 \circ_{21} x_0 \circ_{22} x_1 \circ_{23} x_2,$$

где в результате проведенного синтеза вычислены следующие операции:

$$\circ_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \circ_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \circ_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\circ_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \circ_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ \circ_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

5.5. Спектральные алгебры

Как было указано ранее отказ от использования в аналитической конструкции (6) скобок, изменяющих естественный порядок ее вычисления, приводит к необходимости вычисления операций спектральных алгебр $A_i =< N_f, \oplus_i >$.

Потребуем, чтобы алгебра $A_i =< N_f, \oplus_i >$ была таковой, что для любых ее элементов a и b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение относительно x, $x \in N_k$. Последнее означает, что матрица операции сложения не имеет повторяющихся элементов в любой из ее строк.

Пусть число элементов в множестве N_f равно k. Тогда количество спектральных алгебр – это число размещений с повторениями из $k!$ элементов по k, или $k!^k$, где $k!$ – число перестановок из k элементов, а k – количество строк в матрице операции алгебры.

Заметим, что требования ассоциативности и коммутативности на операцию сложения не накладывается, если порядок вычисления функций g_i в формуле (7) будет соответствовать естественному. Если предполагается синтезированную формулу вычислять в любом порядке относительно операции сложения, то необходимо использовать единую алгебру $A =< N_f, + >$ с ассоциативной и коммутативной операцией.

Вычисление алгебраических операций может быть осуществлено исходя из потребности обеспечить минимальное число слагаемых в спектральном разложении функции. Последнее означает, что текущая операция должна быть такова, чтобы обеспечить минимизацию значности результата сложения и, по возможности, максимизацию количества одинаковых элементов в векторе результирующей функции. Только в этом случае последующая редукция может оказаться полной, что приводит к завершению итерационных вычислений.

Пример 7. Покажем вычисление наилучшей операции сложения $\oplus$ спектральной алгебры для функций из примера 5. В этом случае имеем

$$\mathbf{G} = [012020222002020020020200],$$

$$\mathbf{F} = [011120202022010020210202].$$

Для каждой пары значений функций g и f найдем количество их повторений в совмещенных векторах. Результаты подсчета представим в виде следующий матрицы,

$$\begin{array}{cc} & f \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ g \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \end{array}$$

где видно, что пара (g, f) со значением (0,0) повторяется 9 раз, со значением (0,1) – 1 раз, ..., со значением (2,2) – 6 раз.

Для каждого значения функции g составляем последовательность значений функции f таким образом, чтобы найденное число повторений образовало монотонно возрастающую последовательность:

$$g = 0,\ \mathbf{f}_0 = [021];\ g = 1,\ \mathbf{f}_1 = [102];\ g = 2,\ \mathbf{f}_2 = [210].$$

Из полученных таким образом векторов $\mathbf{f}_t$ составляем матрицу операции спектральной алгебры,

$$\oplus = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате решения соответствующих алгебраических уравнений получаем остаточный вектор $\mathbf{F}''$,

$$\mathbf{F}'' = [001200020010010000110001],$$

который отличается от полученного ранее вектора $\mathbf{F}'$ тем, что элементы 1 и 2 поменялись местами. Отсюда делаем вывод, что в примере 5 нам удалось выбрать одну и хороших операций.

Однако полученная в настоящем примере операция сложения является наилучшей в том смысле, что способствует понижению значности остаточного вектора. Последнее следует из того, что наиболее часто встречающиеся элементы остаточного вектора при вычислении операции $\oplus$ кодируются меньшим числом, а менее часто встречающиеся – большим. Если элемент не встретился ни разу, то он будет закодирован наибольшим числом, что равносильно снижение значности функции, выраженной остаточным вектором. ♦

5.6. Сходимость

Покажем, что описанный выше алгоритм спектральной идентификации дискретных функций (9) обладает свойством сходимости, т.е. за конечное число шагов $M < m$ будет найдено спектральное разложение для произвольной дискретной функции.

Действительно, каждый шаг полной редукции остаточной функции (на нулевом шаге остаточная функция равна идентифицируемой) монотонно уменьшает значность следующей остаточной функции, при этом наиболее часто встречающиеся пары значений спектральной и исходной функции преобразуются в один и тот же элемент остаточного вектора, что способствует полноте редукции на следующем шаге.

Более того, на каждом шаге редукции покрывается не менее kk_j элементов остаточного вектора из его m значений, где k – значность аналитической конструкции, а k_j – значность ее последней переменной. Иными словами на каждом шаге в среднем не менее $(k-1)\bar{k}$ значений текущего остаточного вектора преобразуются в наиболее часто встречающиеся (нулевые) элементы следующего остаточного вектора, где $\bar{k}$ – средняя значность переменных. В последней формуле значение значности аналитической конструкции k уменьшено на единицу по причине необходимости на каждом шаге декомпозиции покрытия одной и той же строки, состоящей из нулевых элементов, в местах расположения которых значение декомпозируемой функции уже идентифицированы (покрыты) на предыдущих шагах.

Алгоритм завершается, когда все значения остаточного вектора одинаковы и равны нулю. В итоге получаем оценку для максимального количества шагов алгоритма дискретной идентификации,

$$M < \frac{m}{(k-1)\bar{k}} = \frac{n}{k-1}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i}. \tag{10}$$

В свою очередь минимально необходимое число шагов алгоритма можно оценить исходя из возможности при редукции матрицы остаточной функции покрытия максимального количества строк, определяемого числом степеней свободы аналитической конструкции. В этом случае число покрываемых строк не может превосходить величину $n(k-1)\bar{k}$, которая учитывает подбор всех операций конструкции, а не только последней. Отсюда, с учетом (10), имеем

$$\frac{1}{k-1}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i} < M < \frac{n}{k-1}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i}.$$

Более точная оценка максимально возможной сложности разложения произвольной дискретной функции, выраженная числом M, найдена в работе [5],

$$M = \frac{1}{k-\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta}, \tag{11}$$

где α – порождающая способностью аналитической конструкции ($0 < \alpha < 1$), β – поправочный коэффициент начальной порождающей способности ($\beta \approx 2\bar{k} - k$). Причем для любого $\varepsilon > 0$ доля функций δ от общего их числа, для которых

$$M < (1-\varepsilon)\frac{1}{k-\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta},$$

меньше, чем $k^{-\varepsilon m}$ и быстро стремится к нулю с ростом m, $\delta < k^{-\varepsilon m}$.

Там же показано, что с ростом n порождающая способность аналитической конструкции асимптотически стремится к своему предельному значению α_k,

$$\alpha_k = k - \frac{1}{k}\log_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{k^k - i}{i+1}. \tag{12}$$

Из таблицы 2, где приведены результаты вычисления α_k, видно, что наилучшие результаты при идентификации дискретных функций достигаются при значности аналитической конструкции, равной 3 и 4. В этом случае и при прочих равных условиях синтез формул наиболее эффективен.

Таблица 2. Предельная порождающая способность α_k.

k	2	3	4	5	6	7	8	9
α_k	0,708	0,578	0,577	0,595	0,612	0,625	0,637	0,647

И, наконец, из (11) и (12) находим, что в асимптотическом области число шагов M алгоритма дискретной идентификации определяется следующим выражением:

$$M \sim \frac{1}{k-\alpha_k}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i}. \tag{13}$$

В частности, из (12) и (13) следует число шагов алгоритма в асимптотической области при идентификации булевых функций,

$$M \sim \frac{2}{1+\log_2 3}\frac{2^n}{n} \approx 0{,}774\frac{2^n}{n}.$$

Следует заметить, что получаемое при этом число операций L будет в n раз больше величины M, $L \sim nM$. Сопоставив этот результат с известными асимптотическими оценками для количества операций L, необходимых для представления произвольной булевой функции [6],

$$L \sim \frac{2^n}{n}, \tag{14}$$

находим, что найденная методика синтеза формул не является наилучшей из возможных. Однако, в той же работе [5] приведен алгоритм синтеза, удовлетворяющий оценке (14), составной частью которого является описанная выше методика спектральной идентификации.

6. Заключение

В результате проведенного исследования разработан и опробован на практике общий подход к дискретной идентификации, основные особенности которого заключаются в следующем. Во-первых, в рамках описанного подхода не требуется использование никаких априорных данных и предположений о структуре и функционировании объекта идентификации. Во-вторых, получаемые при этом математические модели позволяют учесть всю совокупности получаемых экспериментальных данных. В-третьих, разработана прикладная методика синтеза дискретных моделей, подкрепленная простыми и эффективными алгоритмами. В-четвертых, синтезируемые формулы являются наиболее приспособленными для реализации на вычислительных средствах дискретного действия, так как, в конечном итоге, состоят из последовательности бинарных операций над дискретными переменными. В-пятых, на основе разработанной методики идентификации строится алгоритм синтеза формул, удовлетворяющий наилучшим асимптотическим оценкам.

Следует заметить, что описанный подход применим не только для идентификации дискретный объектов без памяти. Его объединение с конечно-автоматным формализмом позволяет выполнять идентификацию объектов, функционирующих во времени и, тем самым, изменяющим свое состояние. В этом случае процесс идентификации заключается в синтезе функции переходов, описывающей изменение текущего состояния объекта, и функций выходов, зависящих от текущего состояния и поставляющих выходные параметры модели.

В рамках конечно-автоматного формализма задача идентификации заключается в определении множества состояний автомата и таблиц для функций переходов и выходов. Предполагается, что входной и выходной алфавит автомата задан. В работе [7] доказано, что поведение автомата с q состояниями восстанавливается посредством кратного эксперимента длины $2q-1$. Другими словами, для полной и надежной идентификации конечного автомата необходимо подать на его вход все возможные входные последовательности длиной $2q-1$. При количестве знаков во входном алфавите, равном p, таких последовательностей ровно p^{2q-1}.

Однако, если число состояний автомата неизвестно, то его идентификация возможна лишь в пределе – на счетном множестве входных строк. Тем не менее, если найден автомат с q' состояниями, не опровергаемый последующими испытаниями длиной, большей чем $2q'-1$, то с большой долей уверенности можно считать, что автомат идентифицирован.

Часто задачи автоматной идентификации имеют ограниченную сложность и на практике удается избежать длительных экспериментов. Так в работе [8] показано, что для почти всех автоматов степень восстановления автомата по его поведению имеет порядок $\log q$, что значительно меньше величины $2q-1$. В свою очередь, доля автоматов, для которых не выполняется приведенная оценка, стремится к нулю с ростом q.

Список литературы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления. В 5 томах. Том 2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под редакцией Пупкова К.А. и Егупова Н.Д. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. 640 с.
2. Карабутов Н.Н. Адаптивная идентификация систем: информационный синтез. М.: КомКнига, 2006. 384 с.
3. Фурасов В.Д. Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005. 150 с.
4. Vykhovanets V.S. Optimal Spectral Expansion for Discrete Control // Proceedings of 17$^{\text{th}}$ IFAC Word Congress. Seoul, 2008. P. 7516-7521.
5. Выхованец В.С. Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // АиТ. 2006. № 3. С. 20-56.
6. Лупанов О.Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем / В кн. «Проблемы кибернетики». Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63-97.
7. Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 179-210.
8. Трахтенброт Б.А., Бардзинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. 400 с.