

О существенной неполноте формальных теорий



В.С. Выхованец

<http://valery.vykhovanets.ru>

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

План доклада

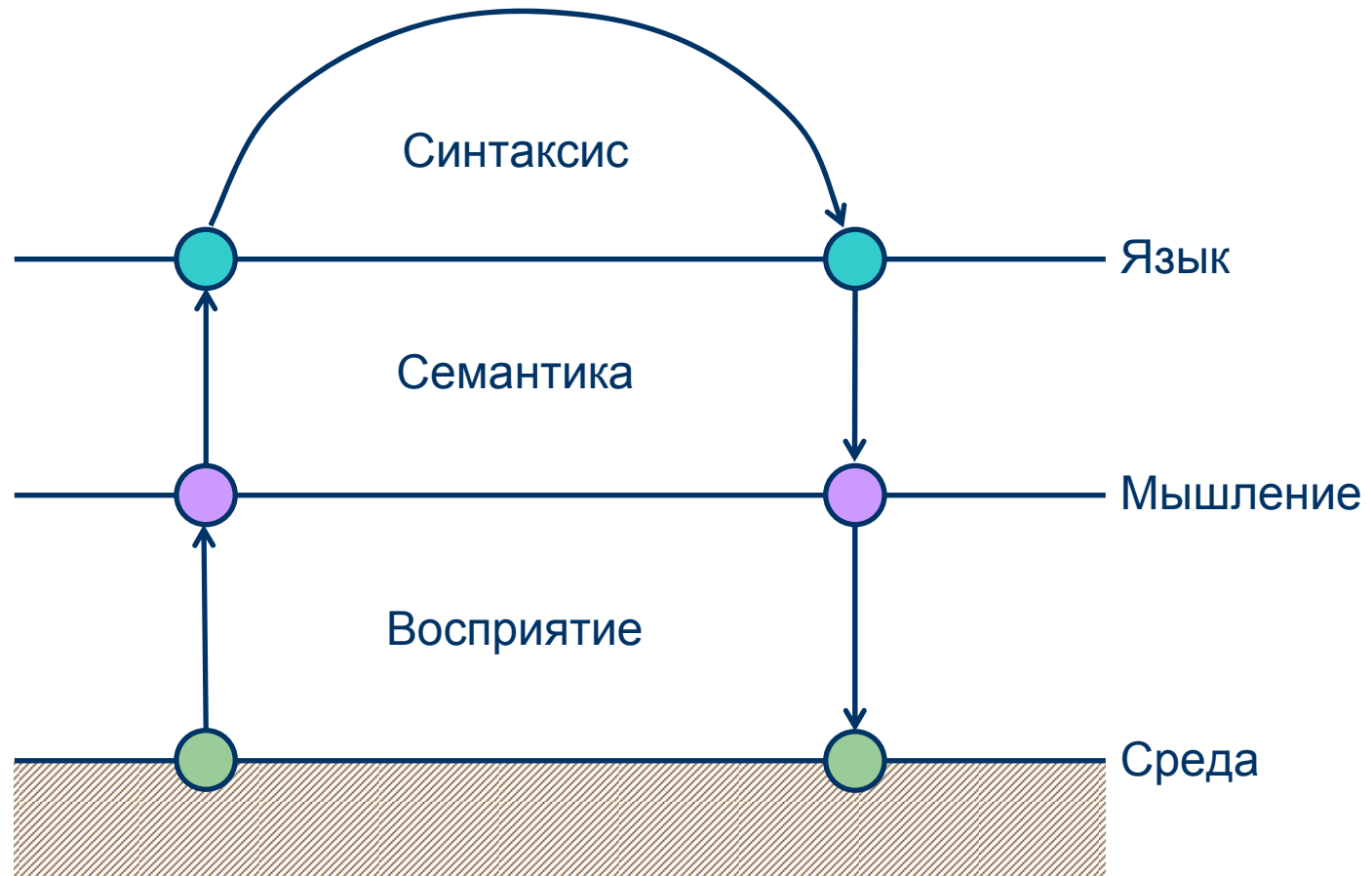
7-10 июня 2009 г.



- Феномен моделирования
- Теория формальных теорий
- Примеры формальных моделей
- Решетка теорий
- Проблема неполноты
- Проблемный подход
- Методология моделирования

Феномен моделирования¹

7-10 июня 2009 г.



¹ Турчин В.Ф. Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции. М.: ЭТС, 2000.

Теория формальных теорий

7-10 июня 2009 г.



- Конечный алфавит S
 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
- Перечислимое множество формул F
 $F \subseteq S^*, S^* = e \cup S \cup S^2 \cup \dots$
- Разрешимое множество аксиом A
 $A \subset F$
- Конечное множество правил вывода P
 $P \subset (\bigcup_{i>0} F^i \rightarrow F)$
- Вывод теорем T
 $\forall t \in T : f_1 \xrightarrow{P} f_2 \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} f_m = t, f_i \in F$

Исчисление высказываний

7-10 июня 2009 г.



- Конечный алфавит $a, b, \dots, z, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \vdash, (,), \alpha, \beta, \dots, \omega$
- Перечислимое множество формул
 $a, b, \dots, z; \varphi_1, \varphi_2 \vdash \neg\varphi_1, (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$
- Разрешимое множество аксиом
 $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, \quad \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta), \quad \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta), \quad (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha,$
 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta, \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha), \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)),$
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha),$
 $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)),$
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
- Конечное множество правил вывода
 - подстановка $\alpha, \varphi(\alpha), \beta \vdash \varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\beta)$
 - отделение $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

Исчисление предикатов

7-10 июня 2009 г.



- Конечный алфавит $\dots, A, B, \dots, \Omega, \forall, \exists$
- Перечислимое множество формул
 $\dots, A, B, \dots, \Omega; \dots, x, y \mapsto \dots, \forall x \varphi_1(x), \exists y \varphi_2(y)$
- Разрешимое множество аксиом
 $\dots, \forall x(\varphi(x)) \rightarrow \varphi(y), \varphi(x) \rightarrow \exists y(\varphi(y))$

- Конечное множество правил вывода
 - подстановка $\alpha, \varphi(\alpha), \beta \mapsto \varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\beta)$
 - отделение $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \mapsto \beta$

Теория множеств

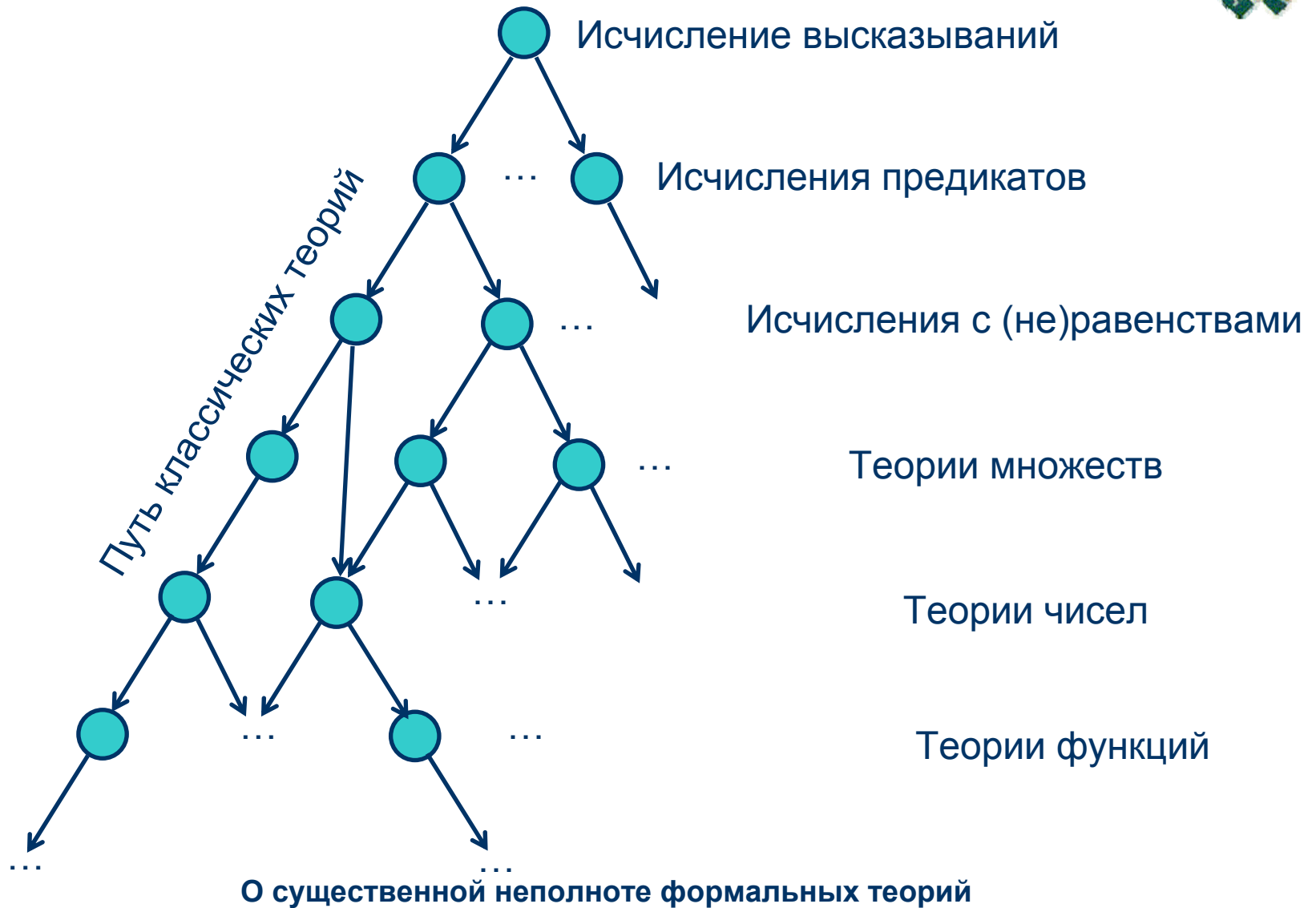
7-10 июня 2009 г.



- Конечный алфавит $\dots, \emptyset, A, B, \dots, Z, \in, \subset, =, \cup, \cap$
- Перечислимое множество формул
 $\dots; \dots, A, B \mapsto \dots, A \in B, A \subset B$
- Разрешимое множество аксиом
 $\dots, \exists \emptyset \forall A (\neg A \in \emptyset), \quad \forall A \forall B (A = B \leftrightarrow \forall C (A \in C \leftrightarrow B \in C)),$
 $\forall A \forall B \exists C \forall D (D \in C \leftrightarrow (D = A \vee D = B)),$
 $\forall A \exists B \forall C (C \in B \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge C \in D)),$
 $\forall A \exists B \forall C (C \in B \leftrightarrow \forall D (D \in C \rightarrow D \in A)),$
 $\forall A \exists B \forall C (C \in B \leftrightarrow (C \in A \wedge \varphi(C))),$
 $\forall A (\forall B \forall C \forall D ((B \in A \wedge \varphi(B, C) \wedge \varphi(B, D)) \rightarrow C = D) \rightarrow$
 $\rightarrow \exists B \forall C (C \in B \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge \varphi(D, C))))),$
 $\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall B (B \in A \rightarrow B \cup \{B\} \in A)),$
 $\forall A (\neg A = \emptyset \rightarrow \exists C (C \in A \wedge C \cap A = \emptyset))$

Решетка теорий

7-10 июня 2009 г.



Свойства формальных систем

7-10 июня 2009 г.

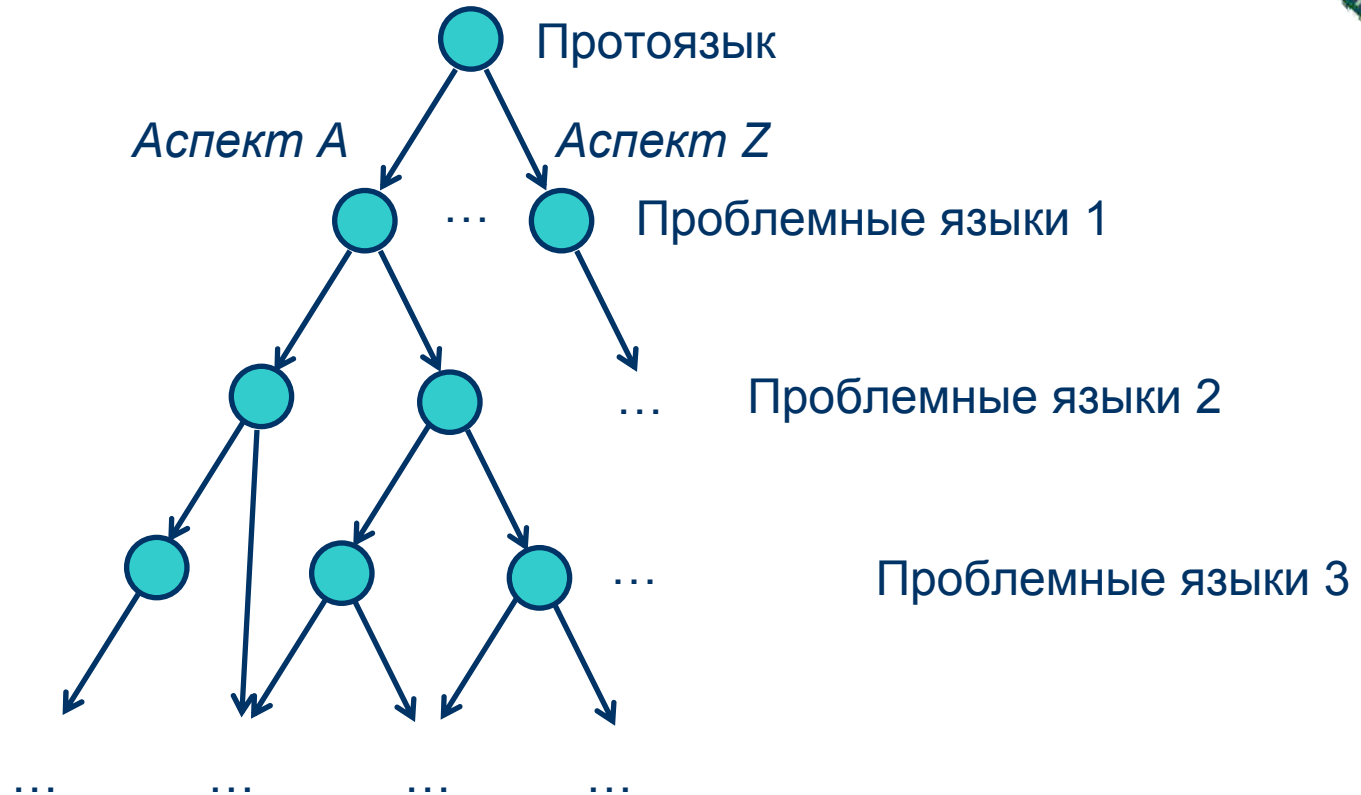


- Перечислимость строк
- Язык формальной теории – подмножество универсального множества строк
- Счетная мощность формальных языков
- Более чем счетная мощность¹ потенциальных языков
- Существование неперечислимых языков
- Наличие неразрешимых задач

¹ Теорема Кантора о мощности множества подмножеств

Проблемный подход

7-10 июня 2009 г.



Методология моделирования

7-10 июня 2009 г.

