

## О существенной неполноте формального метода

Валерий Выхованец

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия

**Резюме.** Рассмотрены возможности формального подхода к описанию результатов рационального познания. Показана несостоятельность формально-логического метода, так как последний порождает теории, обладающие существенной неполнотой и непополняемостью. По этой причине формы выражения результатов рационального познания, а именно «понятие», «суждение», «умозаключение», «теория», предлагается дополнить еще одной формой, которая названа «корпусом». Доказана состоятельность корпусного подхода и описано, как при корпусном подходе возникает возможность преодоления проблем, связанных с неполнотой и непополняемостью формальных теорий.

**Ключевые слова:** формальные теории, неполнота и непополняемость, предметная и проблемная область, проблемный язык, протоязык, прототеория формальных языков, формы рационального познания, корпус теорий.

Формальный метод, заключающийся в фиксации конечного алфавита, разрешимого исходного множества аксиом и конечного множества правил вывода, а также в определении эффективной процедуры вывода формул, оказался применимым только для задания перечислимых множеств строк конечной длины, что связано с рекурсивной перечислимостью множества формул формальных теорий. Однако на любом конечном алфавите существует более чем счетное множество языков, понимаемых как произвольные множества строк конечной длины. Это следует из счетности множества таких строк, заданных в конечном алфавите, и более чем счетной мощности множества их подмножеств (теорема Кантора)<sup>1</sup>.

Таким образом, существует континуум языков, которые назовем неперечислимыми, и которые не имеют конструктивных средств порождения (распознавания) принадлежащих им строк. Более того, найти такие средства не представляется возможным в принципе. Следовательно, неперечислимые языки непосредственно не могут быть использованы в формальной теории, претендующей на конечность средств описания предметной области. Этот факт нашел свое отражение в известной теореме К. Геделя о неполноте<sup>2</sup>, утверждающей существование формул, которые не только не могут быть выведены в достаточно богатых формальных теориях, но и для которых не может быть показана их невыводимость. Более того, любая такая формула, будучи добавленной во множество аксиом, не делает эту теорию полной.

---

<sup>1</sup> Теорема утверждает, что никакое множество не эквивалентно множеству всех подмножеств этого множества, где эквивалентность, или равномощность, понимается в смысле существования взаимно однозначного отображения одного множества в другое.

<sup>2</sup> См. [Клини 1973], с. 383.

По этой причине предприняты прикладные исследования выразительных возможностей формальных теорий в направлении расширения множества аксиом<sup>3</sup>. Однако на этом пути мы сталкиваемся с бесконечностью, но на этот раз не с бесконечным числом формул теории, а с бесконечным числом самих формальных теорий, поскольку установлено, что многие конечно аксиоматизируемые теории (исчисления) имеют бесконечное число непротиворечивых расширений. Установлено, что множество таких теорий образует определенную структуру, описываемую соответствующей метатеорией – исчислением формальных теорий, или математикой метаматематики [Расёва и Сикорский 1972].

В частности, для формализации понятий исследован логический подход, суть которого заключается в следующем [Непейвода 2000]. В каждый момент времени для каждой конкретной цели взаимоотношения понятий некоторой предметной области описываются классической логической теорией, называемой ипостасью. Декларируется, что понятия могут описываться лишь в их взаимосвязи, а сама совокупность понятий составляет сигнатуру ипостаси. Для выражения семантики понятий используется логическое исчисление, определяющее взаимосвязь понятий в виде теорем ипостаси. Постулируется, что каждая ипостась имеет как подтеорию – базовую ипостась, так и свои эффективно конструируемые расширения – альтернативы – дочерние ипостаси, которые по определению являются логически несовместимыми между собой. Иными словами, путем расширения исходной теории создается решетка теорий, минимальный элемент которой – классическая математическая логика.

Изучение различных множеств формальных теорий, структурированных в виде решетки, занимает все более значительное место в исследованиях и является одной из главных тенденций развития логики [Карпенко 2000]. В частности, в результате изучения найденного многообразия формальных логик даже поставлен вопрос [Карпенко 2005]: имеет ли логика «какое-то отношение к мыслительной деятельности человека»? Если имеет, «то тогда уровень логичности последней скрывается за «функционированием» бесконечных классов различных логических систем». Более того, высказано предположение о том [Козн 1974], что «любое техническое достижение и в будущем не прольёт света на основные философские проблемы», так как «никакая конечно аксиоматизируемая система не может быть полной», что, с одной стороны, «является величайшим препятствием для любой попытки полностью понять природу бесконечных множеств», а, с другой стороны, «чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть».

На практике же оказалось, что любая научная теория ограничена своей областью применения и даже в этой области, как правило, неполна, т.е. порождает наряду с отличными предсказаниями и неадекватные результаты. А попытка решить проблему неполноты путем расширения существующей теории почти всегда приводит к концепту-

---

<sup>3</sup> Необходимо упомянуть наличие двух подходов к определению множества аксиом: формульный подход, основанный на задании конечного множества аксиом относительно фиксированных переменных, а также специального правила подстановки, позволяющего фиксированные переменные заменить другими формулами теории; и метаформульный подход, при котором аксиомы задаются схемами аксиом над метапеременными, понимаемыми в смысле возможности подстановки вместо них произвольных формул, при этом правило подстановки в теорию не включается, а каждая схема выражает бесконечное число вариантов применения аксиомы. Однако как в первом, так и втором случае число самих аксиом следует признать конечным, так как все аксиомы выражают все же конечное число некоторых закономерностей, на основе которых строится формальная теория. По этой причине конечно аксиоматизируемые теории иногда рассматриваются как рекурсивно аксиоматизируемые.

альной противоречивости, когда «формально непротиворечивые понятия начинают друг другу мешать, а неприятности лавинообразно разрастаться» [Непейвода 2008].

Таким образом, выразительные возможности конечно аксиоматизируемых теорий оказались явно недостаточными для порождения всего многообразия формул, призванного отразить существующее многообразие предметных областей. По этой причине предприняты исследования формальных теорий, которые не являются конечно аксиоматизируемыми<sup>4</sup>, т.е. множество аксиом которой не является рекурсивно перечислимым. Потенциально в рамках таких теорий становится возможным оперировать более чем счетным множеством формул, однако применить такие теории на практике не представляется возможным ввиду неконструктивности используемых средств<sup>5</sup>. Даже если эта ситуация и станет актуальной, то необходимо будет предположить существование бесконечного числа закономерностей, служащих для начального описания предметной области, и из которых выводятся другие ее описания, а также бесконечную мощность множества понятий, необходимых для описания этой предметной области, что непосредственно следует из бесконечности множества исходных посылок. Последнее не согласуется с самим принципом понятийного осмысления действительности, требующим выражения закономерностей окружающего нас мира через конечное число исходных понятий и суждений.

Следует заметить, что ход становления и развития естественных языков выработал иной механизм решения проблемы существенной неполноты конечных средств описания предметных областей. Давно замечено, что естественный язык, или U-язык, «для каждого конкретного контекста единственный: если бы нам пришлось говорить о нескольких различных U-языках, то все равно мы пользовались бы одним из них и этот язык был бы U-языком... Он не является неизменным, но постоянно находится в процессе развития: время от времени мы можем вводить новые термины и новую символику; точно также мы можем соглашаться использовать старые термины в новом смысле или же отказаться от них вообще» [Карри 1969].

Как это и наблюдается в естественных языках, по мере изучения любой предметной области видоизменяется и сам язык, предназначенный для выражения результатов познавательной деятельности, причем изменяется таким образом, чтобы обеспечить адекватность языковых средств тем идеальным объектам, которые появляются в сознании как результат отражения объективной действительности. «Принятие или отказ от абстрактных языковых форм, точно так же, как и принятие или отказ от любых других языковых форм в любой отрасли знания, будет, в конце концов, решаться эффективностью их как инструментов, отношением достигнутых результатов к количеству и сложности требуемых усилий» [Карнап 1959].

Не всегда такие языковые формы являются логически непротиворечивыми. Более того, требовать такую непротиворечивость нельзя в принципе по причине существенной многоаспектности (контекстности, проблемности) знакового выражения понятий.

---

<sup>4</sup> Например, известны теории, построенные на основе формализации таких понятий как класс всех множеств, класс всех ординалов, класс всех топологических пространств, и т.д., определенные на более чем счетной сигнатуре и не являющиеся конечно аксиоматизируемыми.

<sup>5</sup> Обоснование существования не конечно аксиоматизируемых теорий выглядит примерно так: существуют различные множества формул, истинные для различных подмножеств объектов (классов, групп, полей, и т.п.), следовательно, рассматриваемая теория не является конечно аксиоматизируемой, так как число таких подмножеств более чем счетное. Иными словами, такие теории существуют потенциально, и предъявить их каким-либо актуальным образом не представляется возможным.

Отсюда, в частности, получаем алогичность и паралогичность естественного языка, являющегося, по своей сути, множеством умозаключений взаимно противоречивых теорий.

Этот механизм лежит в основе нашего утверждения о невозможности однозначной семиотической репрезентации достаточно сложных понятий и необходимости создания множества специализированных предметных языков, или проблемных языков, для адекватного описания одной и той же предметной области. Только при проблемном подходе, когда число языков, применяемых для описания заданной предметной области, ничем не ограничено, появляется возможность рассматривать все их комбинации как некоторое интегральное языковое средство, с помощью которого возможно порождение произвольного множества строк, в том числе и непериодического, необходимого для исчерпывающего (полного) описания этой предметной области.

Отсюда актуальным видится доказательство следующего утверждения: мощность множества языков проблемного описания предметной области, порождаемого формальными теориями, более чем счетна. Действительно, число конечных строк в конечном алфавите счетно. Отсюда делаем заключение о счетности множества формальных теорий, каждая из которых представима конечной строкой над используемым алфавитом. В свою очередь множество формальных теорий порождает множество перечислимых языков со счетной мощностью. Следует также предположить и счетность множества проблемных областей, которые могут быть заданы на одной и той же предметной области. Последнее следует из того, что для обозначения проблемы может быть выбрана любая строка из счетного множества строк конечной длины в заданном алфавите. Для описания каждой проблемной области воспользуемся своей формальной теорией. Очевидно, что одной и той же предметной области можно сопоставить любое из подмножеств множества проблемных областей, т.е. описать эту предметную область произвольной совокупностью формальных языков, соответствующих одному из подмножеств выделенного универсума проблемных областей. Следовательно, одна и та же предметная область может быть описана более чем счетным числом способов, так как мощность булеана счетного множества проблемных областей более чем счетна. Отсюда заключаем, что мощность множества языков, которые могут быть использованы для проблемного описания одной и той же предметной области, более чем счетна.

Традиционно понятие как начальная форма фиксации результатов рационального познания выражается в виде слова, а суждения понимаются в узком смысле и рассматриваются как предложения, выражающие понятие (логической) истины. Иными словами суждение – это взаимосвязь понятий-слов, которая имеет место быть. Умозаключение, в свою очередь, выражается последовательностью предложений-суждений, которая построена по определенным правилам. В умозаключении различают суждения-посылки и суждение-следствие. Правила построения умозаключений определяются соответствующей теорией и обеспечивают истинность (верность, состоятельность, убедительность) следствия при истинности (верности, состоятельности, убедительности) посылок. В свою очередь теория служит для определения правил построения умозаключений, которые сохраняют истинность (верность, состоятельность, убедительность) всех выводимых в ней умозаключений.

В рассматриваемом нами подходе формы выражения результатов рационального познания трактуются несколько шире. Основное отличие в том, что понятие представляется знаком (словом), который предполагается не имеющим своего единственного

(однозначного) выражения. В этом случае множество суждений интерпретируется как определение и, одновременно, как способ выражения соответствующего понятия-знака через другие понятия, также задаваемые одним из способов своего выражения (определения). Иными словами, суждения – форма выражения произвольных понятий, а не только понятия (логической) истины. В свою очередь умозаключение – это последовательность суждений, или текст, не выражающий никакого понятия, или выражающий «пустое» понятие. Правила выражения «пустого» понятия задаются соответствующей (формальной) теорией, которая определяет разрешенные способы соединения понятий, представленных в одной из форм своего выражения – понятиями-суждениями, для получения допустимых (содержательных, интерпретируемых) описаний предметной области в виде некоторого множества умозаключений.

При применении описываемого подхода для решения каждой проблемы и в процессе ее решения будем создавать свой, присущий только этой проблеме специализированный предметный язык, отражающий понятийную структуру проблемной области. Для этого выявленные в процессе анализа понятия включим во множество понятий создаваемого языка, а способы выражения понятий положим в основу его синтаксиса. Описание понятийной структуры проблемной области и синтаксиса проблемного языка выполним на протоязыке<sup>6</sup>, имеющем фиксированный синтаксис и семантику, которые минимально достаточны для определения синтаксиса и описания семантики любого проблемного языка. Семантическую роль протоязыка ограничим реализацией аксиомы, позволяющей вводить первичные семантические категории, необходимые для описания семантики проблемных языков.

Описание семантики осуществим методом математической индукции, заключающимся в использовании семантических категорий, которые определяются по мере необходимости, в процессе описания проблемного языка и средствами этого языка [Выхованец 2008]. Базу индукции, или первичные семантические категории, объявим с помощью аксиомы и представим формулами некоторой внешней теории, например, пояснениями на естественном языке, или с помощью команд некоторого моделирующего устройства. На содержательном уровне это выглядит как использование создаваемого проблемного языка для описания своей семантики<sup>7</sup>. Последнее выполнимо благодаря возможности пополнения множества базовых семантических категорий и наличия механизма определения новых семантических категорий на основе имеющихся.

Так как понятийная структура проблемной области может быть общей для нескольких задач, решение которых может преследовать различные цели, в том числе и исключаящие друг друга, при описании семантики предусмотрим возможность задания одной или нескольких прагматик, являющихся, по своей сути, различными контек-

---

<sup>6</sup> За внешним многообразием естественных языков проступают общие контуры коммуникативной системы человека. Так, во всех языках представлено различие между номинацией (называнием), предикацией (суждением) и дискурсом (умозаключением). Во всех языках есть синтаксис, а между отдельными частями синтаксической структуры усматриваются закономерные корреляции. Все языки имеют средства для выражения прагматических компонентов. Это дает возможность говорить о наличии некоторой универсальной грамматики – общей врожденной подосновы всех реально засвидетельствованных и потенциально возможных языков, или протоязыка.

<sup>7</sup> Аналогичное явление наблюдается в естественных языках, названных А. Тарским по этой причине «семантически замкнутыми». Однако определить семантику внутри замкнутой семиотической системы нельзя. Для этого необходима некоторая внешняя теория – метатеория, на языке которой задается интерпретация форм выражения базовых понятий языка. В естественных языках в качестве такой метатеории используется механизм сопоставления знаков представлениям, лежащий в основе процесса обучения.

стными интерпретациями одной и той же формы выражения понятия [Выхованец и Иосенкин 2005].

Для задания понятийной структуры предусмотрим в протоязыке выразительные средства для описания способов абстрагирования понятий, а именно: типизации-конкретизации, обобщения-специализации, агрегации-декомпозиции и ассоциации-индивидуализации<sup>8</sup>. Выделенные абстракции рассматриваются как умственные операции, необходимые и достаточные для мысленного выделения и превращения в отдельные понятия тех представлений, которые накоплены относительно формализуемой проблемной области.

Иными словами, мы не используем формальную логику, основанную на противопоставлении понятий истины и лжи, для описания содержаний понятий и их взаимосвязи. Мы придерживаемся позитивного подхода в выражении чего-либо: «...отрицание чего-то не есть отсутствие этого чего-то. Для фиксации такого феномена у человека нет чувственных датчиков. Отсутствие чего-то обосновывается лишь наличием того, что с этим чего-то несовместимо. Поэтому в человеческом сознании вполне укладывается картина, в которой «речка движется и не движется, вся из лунного серебра...», а в традиционной логике в этой ситуации приходится констатировать наличие противоречия» [Поспелов 2003]. Отсюда и необходимость использования в качестве основного формализма не логических теорий, которых развелось великое множество, а единственной прототеории формальных языков [Выхованец 2007].

В свете вышеизложенного формальный метод, предназначенный для построения научной теории, при котором в её основу кладутся некоторые исходные положения (суждения) – аксиомы, из которых все остальные утверждения (умозаключения) этой науки – теоремы, должны выводиться чисто логическим путём, посредством доказательств, видится несостоятельным, так как приводит к существенной неполноте, как самой теории, так и знаний, представляемых в этом формализме. По этой причине ряд, состоящий из форм выражения результатов рационального познания, куда традиционно включают «понятие», «суждение», «умозаключение» и «теорию», следует дополнить новой формой, которую условно будем называть корпусом.

Корпус, по аналогии с соответствующим термином из современной корпусной лингвистики<sup>9</sup>, – это множество теорий, описывающие одну и ту же предметную область и предназначенные для всестороннего (полного) представления знаний, которые накоплены относительно этой предметной области в аспекте различных проблемных ситуаций. Только при корпусном подходе к описанию предметных областей становится возможным преодоление теоретических и практических проблем, связанных с существенной неполнотой и непополняемостью формальных теорий.

---

<sup>8</sup> Известны два типа логик – общая и трансцендентальная, различие которых восходит к И. Канту. Общая логика отвлекается от всякого содержания познания и исследует формальные правила рассуждений. В свою очередь трансцендентальная логика имеет дело с содержанием познания и исследует онтологическую структуру универсума. При этом общая логика, как и математика, тяготеет к работе с однородным универсумом, отвлекаясь от его качественной неоднородности и сложности, для чего необходимы типизация и обобщение понятий. А трансцендентальная логика, свойственная, например, историческому познанию, учитывает структуру универсума, его качественную разнородность, для чего требуются агрегация и ассоциация понятий.

<sup>9</sup> Лингвистический корпус текстов – большой, представленный в электронном виде, унифицированный, структурированный, размеченный, филологически компетентный массив языковых данных, предназначенный для решения конкретных лингвистических задач.

В отличие от древовидной структуры множества логических теорий, при корпусном подходе имеем сетевую структуру, в которой между теориями имеются перекрестные связи. В отличие от корпусной лингвистики, где корпус текстов служит эмпирическим материалом для построения формальной теории, при корпусном подходе строится множество теорий (проблемных языков), которые порождают все многообразие текстов, необходимых для описания той или иной предметной области.

В аспекте вышеизложенного нами показано, что понятие как первичная форма рационального познания является сложным когнитивным феноменом, не имеющим однозначных и логически согласованных между собой семиотических репрезентаций. Однако имеется состоятельный подход, позволяющий радикально переосмыслить и формализовать понятие, выразить такие его свойства как предметность, рефлексивность, субъектность и продуктивность<sup>10</sup>, которые существенным образом конфликтуют с устоявшимися логико-философскими представлениями.

### Список источников

- Выхованец, В. С. и Иосенкин, В. Я. 2005. Понятийный анализ и контекстная технология программирования. *Проблемы управления*, № 4, с. 2-11.
- Выхованец, В. С. 2007. Что истинно во всех мирах. *Тезисы докладов V Международной конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве»*, с. 36. Тирасполь.
- Выхованец, В. С. 2008. Описание семантики контекстно-свободных языков методом математической индукции. *Научно-техническая информация. Сер. 2: Информационные процессы и системы*, № 7, с. 6-14.
- Карпенко, А. С. 2000. Логика на рубеже тысячелетий. *Логические исследования*, вып. 7, с. 7-60.
- Карпенко, А. С. 2004. Предмет логики в свете основных тенденций ее развития. *Логические исследования*, вып. 11, с. 5.
- Карнап, Р. 1959. Эмпиризм, семантика и онтология. В кн. *Значение и необходимость*. М.: Иностранная литература.
- Карри, Х. Б. 1969. *Основания математической логики*. М.: Мир. С. 56.
- Клини, С. 1973. *Математическая логика*. М.: Мир.
- Козн, П. Дж. 1974. Об основаниях теории множеств. *Успехи математических наук*, Т. 29, вып. 5, с. 169-176.
- Кравцов, Л. Г. 2004. Методологические проблемы психологического анализа мышления в понятиях. *Первая российская конференция по когнитивной науке*. Казань. <http://www.ksu.ru/ss/cogsci04/133.doc>.
- Непейвода, Н. Н. 2000. *Прикладная логика*. Новосибирск. С. 375.
- Непейвода, Н. Н. 2008. Неформализуемость как логическая характеристика жизни. *Электронный журнал Logical Studies*. <http://logic.ru/ru/node/149/>.
- Поспелов, Д. А. 2003. Где исчезают виртуальные миры? *Новости искусственного интеллекта*, № 3, с. 9-25.
- Расёва, Е. и Сикорский Р. 1972. *Математика метаматематики*. М.: Наука.

---

<sup>10</sup> Проблематика, связанная с формализацией понятий, рассмотрена в [Кравцов 2004].