

Philosophy, Mathematics, Linguistics:
Aspects of Interaction

About Essential
Incompleteness
of Formal Method



2009

Valeriy Vykhovanets
Institute of Control Science
Moscow



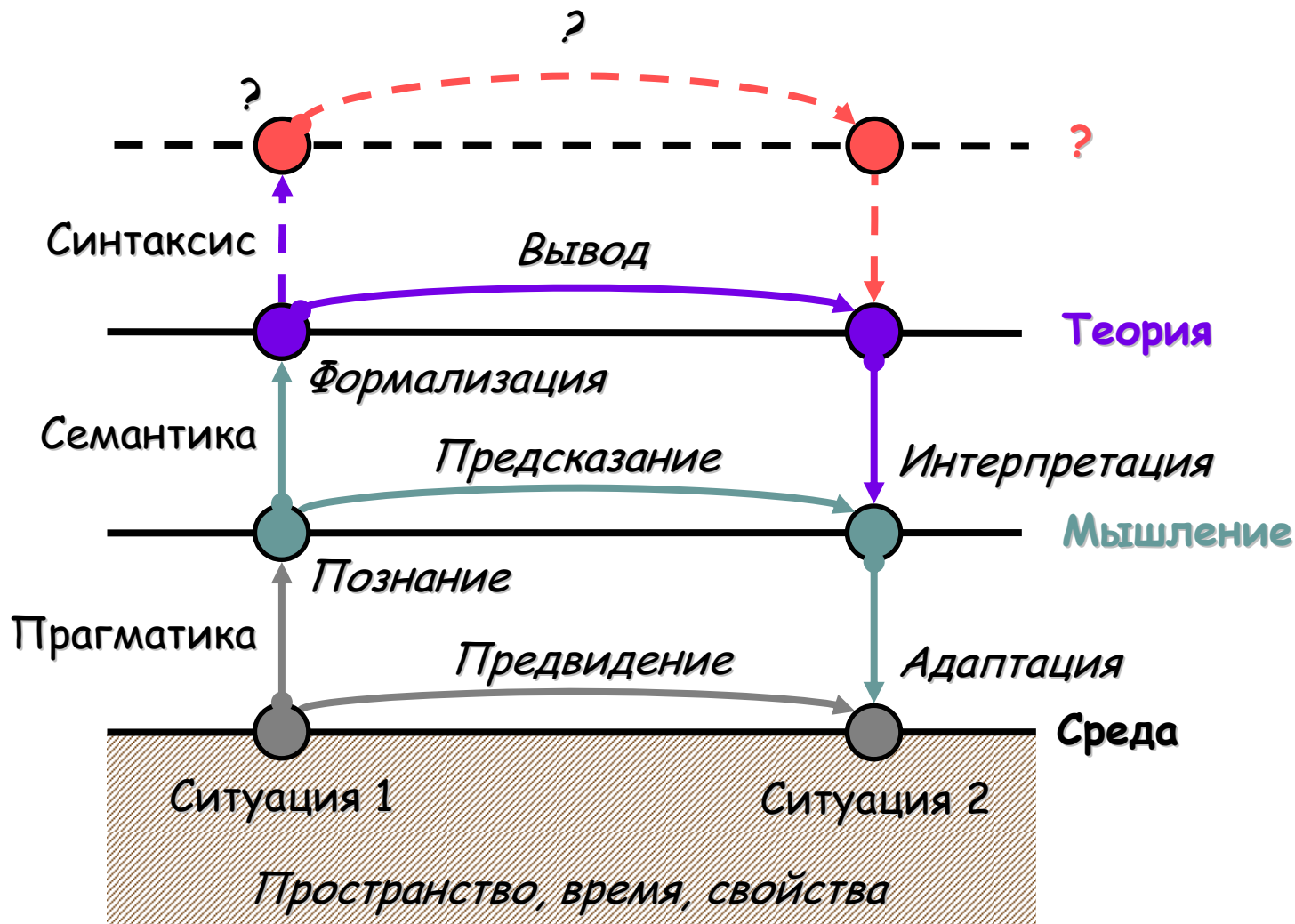
<http://valery.vykhovanets.ru>

План доклада



- Феномен формализации
- Формальная теория
- Неполнота и непополнимость
- Решетка теорий
- Естественные языки
- Корпусной подход
- Проблемные vs. универсальные языки
- Демонстрационные пример
- Заключение

Феномен формализации



Формальная теория



- Конечный алфавит S

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

- Перечислимое множество формул F

$$F \subseteq S^*, \quad S^* = e \cup S \cup S^2 \cup \dots$$

- Разрешимое множество аксиом A

$$A \subset F$$

- Конечное множество правил вывода P

$$P \subset \left(\bigcup_{i>0} F^i \rightarrow F \right)$$

- Вывод теорем T

$$\forall t \in T: f_1 \xrightarrow{P} f_2 \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} f_m = t, \quad f_i \in F$$



Формальный метод

- **Формальная теория:**
 - множество теорем перечислимо
 - мощность множества теорем счетная
 - мощность множества теорий счетная
- **Язык формальной теории:**
 - подмножество универсального множества от конечного алфавита теории
 - мощность множества языков континуальная

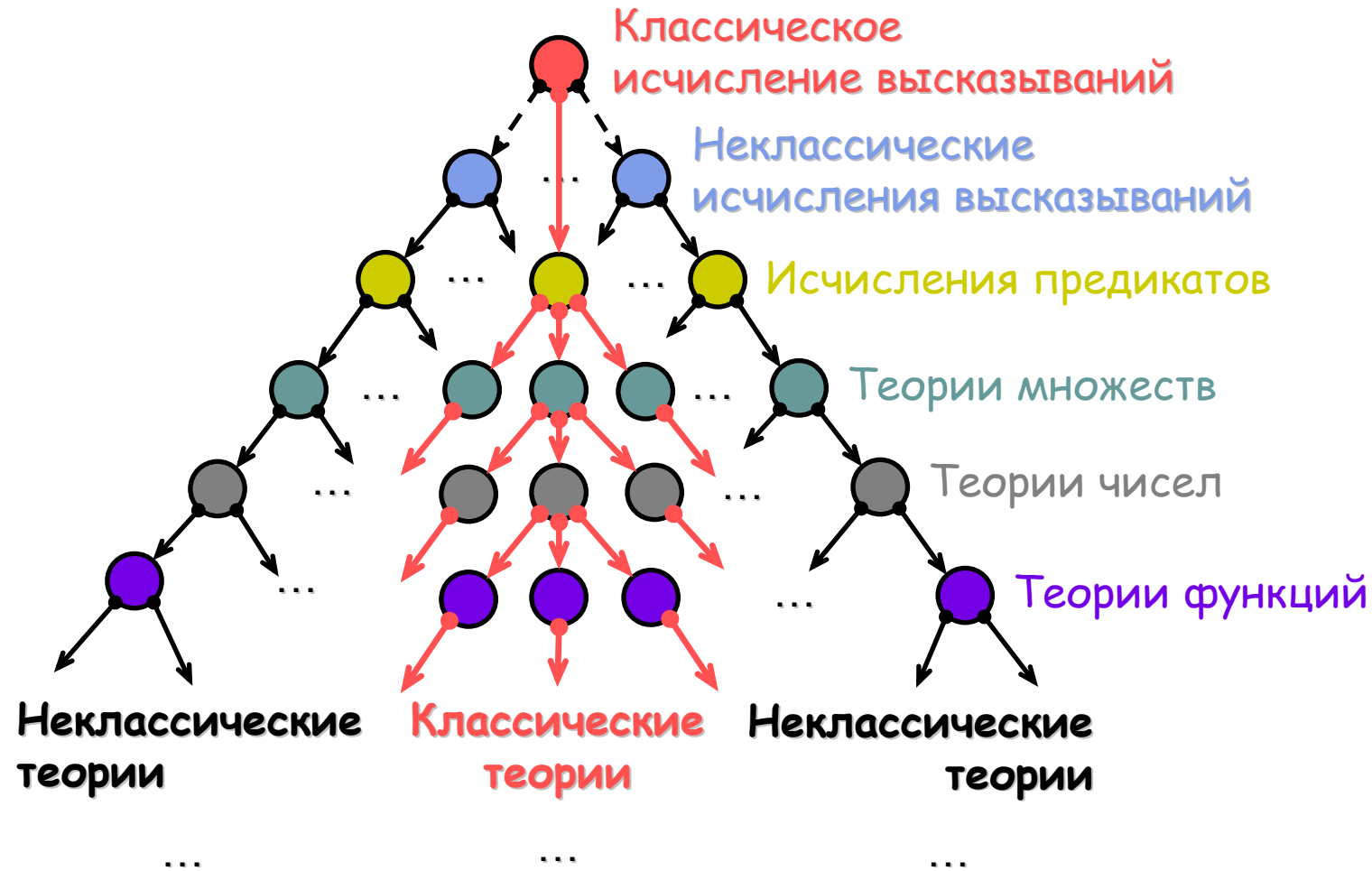
-
- **Тогда существуют:**
 - Неперечислимые языки,
 - Невыводимые формулы,
 - Нерезрешимые задачи (проблемы).

Неполнота и непополнимость



- **Теорема о неполноте** (К. Гедель): для любой формальной теории, включающей аксиомы элементарной арифметики:
 - Если теория непротиворечива, то она не может быть полна;
 - Непротиворечивость теории не может быть доказана внутри этой теории.
- **Теорема о непополнимости** (К. Гедель): при добавлении новых аксиом в любую неполную теорию все равно будут существовать теоремы, которые невозможно вывести в новой теории.

Решетка теорий





Проблемы логики

- Имеет ли логика «какое-то отношение к мыслительной деятельности человека»? Если имеет, «то тогда уровень логичности последней скрывается за «функционированием» бесконечных классов различных логических систем» [Карпенко 2005].



- «...любое техническое достижение и в будущем не прольёт света на основные философские проблемы», так как «никакая конечно аксиоматизируемая система не может быть полной», что, с одной стороны, «является величайшим препятствием для любой попытки полностью понять природу бесконечных множеств», а, с другой стороны, «чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть» [Козн 1974].

Прикладные проблемы

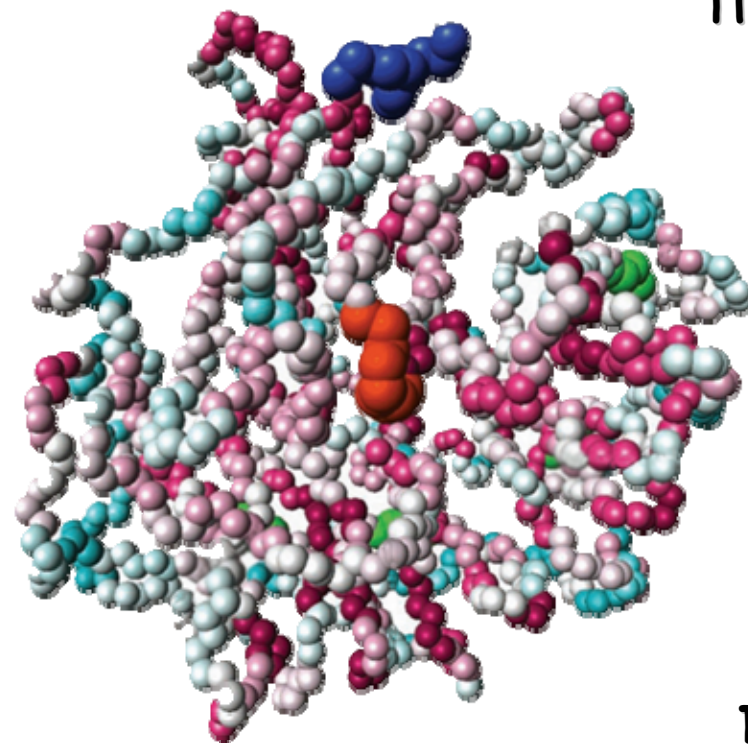


- Любая научная теория ограничена своей областью применения и даже в этой области, как правило, неполна, т.е. порождает наряду с отличными предсказаниями и неадекватные результаты. А попытка решить проблему неполноты путем расширения существующей теории почти всегда приводит к концептуальной противоречивости, когда «формально непротиворечивые понятия начинают друг другу мешать, а неприятности лавинообразно разрастаться» [Непейвода 2008].



- Естественный язык, или U-язык, «для каждого конкретного контекста единственный: если бы нам пришлось говорить о нескольких различных U-языках, то все равно мы пользовались бы одним из них и этот язык был бы U-языком... Он не является неизменным, но постоянно находится в процессе развития: время от времени мы можем вводить новые термины и новую символику; точно также мы можем соглашаться использовать старые термины в новом смысле или же отказаться от них вообще» [Карри 1969]

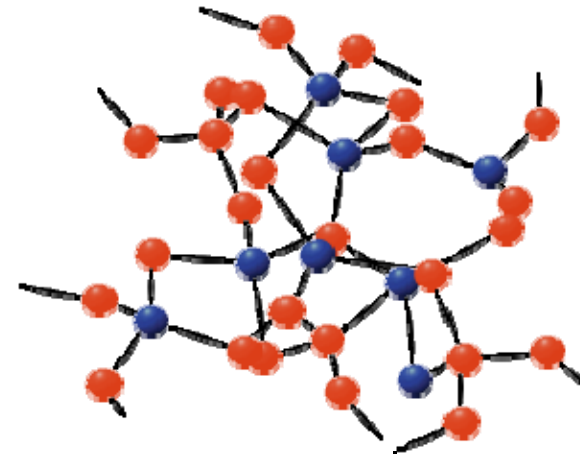
Адаптация языка



U-Язык

(противоречивый,
алогичный, паралогичный)

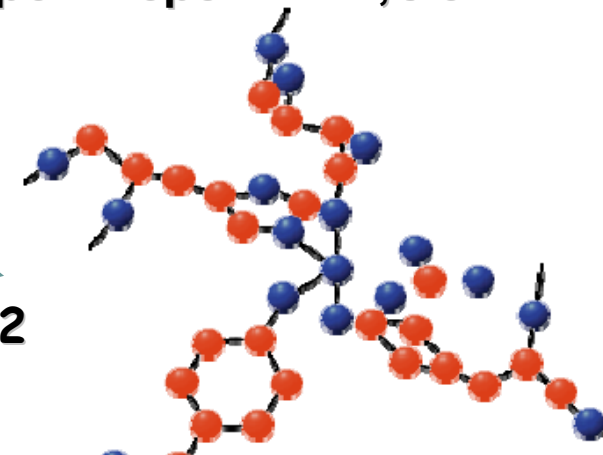
Проблема 1



S-Язык 2

(непротиворечивый, логичный)

Проблема 2



S-Язык 2

(непротиворечивый, логичный)

Противоречивость, паралогичность

Критерий формализации



- «Принятие или отказ от абстрактных языковых форм, точно так же, как и принятие или отказ от любых других языковых форм в любой отрасли знания, будет, в конце концов, решаться эффективностью их как инструментов, отношением достигнутых результатов к количеству и сложности требуемых усилий» [Карнап 1959]

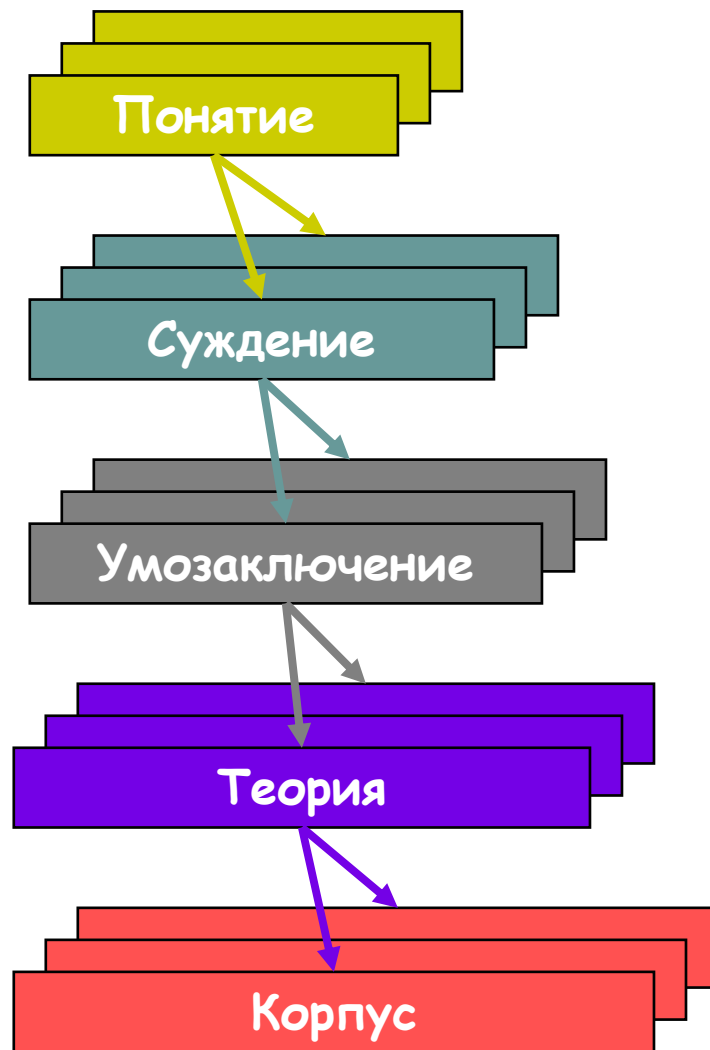
Базовое умозаключение



- Невозможность однозначной семиотической репрезентации достаточно сложных предметных областей (систем понятий)
 - Необходимость создания множества проблемных языков, для адекватного описания одной и той же предметной области
-
- При проблемном подходе создадим интегральное языковое средство, с помощью которого возможно порождение произвольного множества строк, в том числе и непериодического, необходимого для полного описания предметной области.



- **Понятие:** слово (знак, символ)
- **Суждение:** последовательность понятий, выражающая (логическую) истину
- **Умозаключение:**
 - посылки: последовательность суждений
 - следствие: суждение, выводимое из посылок и сохраняющее (логическую) истинность (верность, состоятельность, убедительность) посылок
- **Теория** - правила построения умозаключений, применяемых для вывода новых суждений



Корпус - множество теорий, описывающие одну и ту же предметную область и предназначенное для всестороннего (полного) представления знаний, которые накоплены относительно этой предметной области в аспекте различных проблемных ситуаций

Позитивность мышления



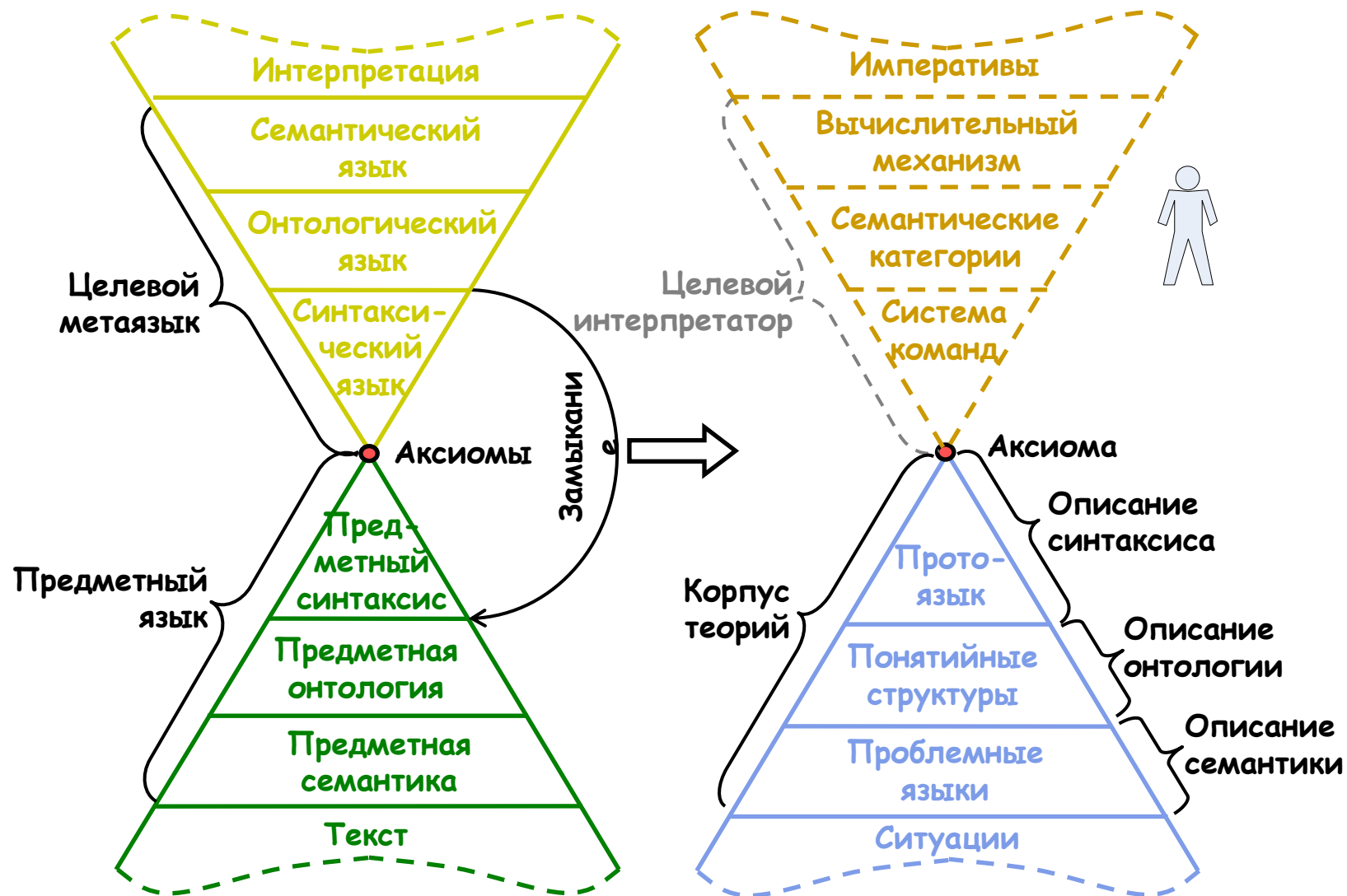
- «...отрицание чего-то не есть отсутствие этого чего-то. Для фиксации такого феномена у человека нет чувственных датчиков. Отсутствие чего-то обосновывается лишь наличием того, что с этим чего-то несовместимо. Поэтому в человеческом сознании вполне укладывается картина, в которой «речка движется и не движется, вся из лунного серебра...», а в традиционной логике в этой ситуации приходится констатировать наличие противоречия» [Поспелов 2003]

Понятийный подход



- **Понятие:** последовательность слов
- **Суждение:** последовательность понятий, выражающая некоторое понятие
- **Умозаключение:** суждение, выражающее пустое понятие
- **Теория:** правила выражения понятий (проблемный язык), необходимые для описания некоторой проблемной области:
 - Понятия: множество слов
 - Синтаксис: множество правил выражения понятий
 - Семантика: интерпретация правил выражения понятий
 - Прагматика: адаптации правил выражения понятий

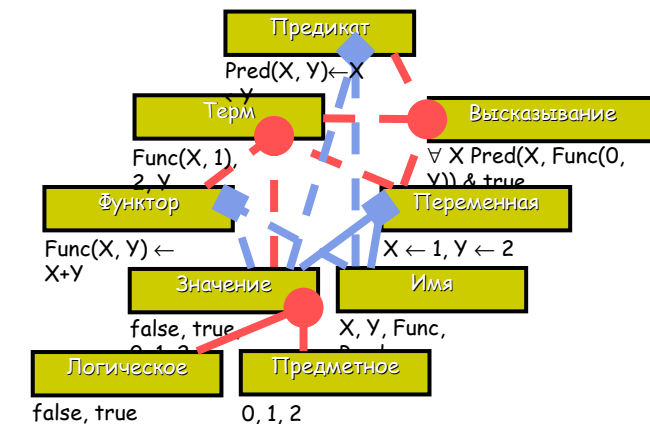
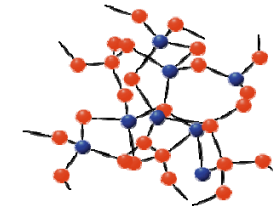
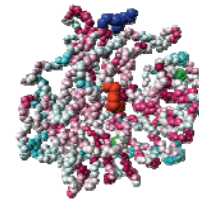
Замыкание языков



Методика формализации

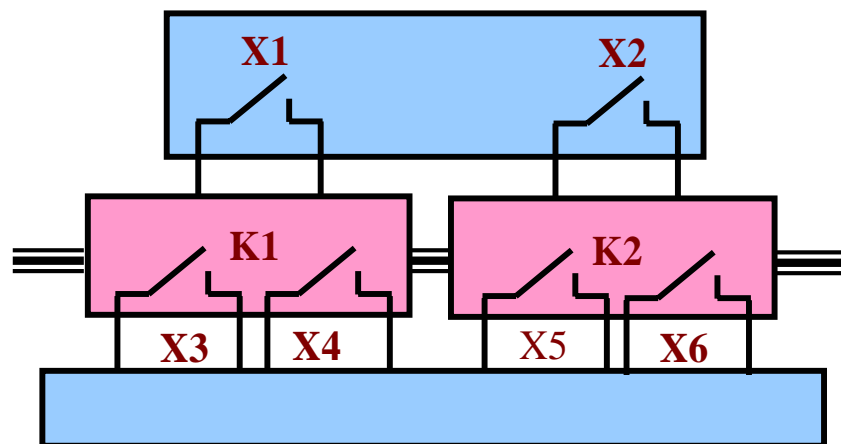


- Предметная область
- Проблематика
- Проблемная область
- Понятийная структура
- Синтаксис понятий
- Семантика понятий
- Прагматика понятий
- Ситуационное описание



```
() Boolean ()  
'false'  
  { Ложь }  
  asm { mov eax, 0; push eax }  
'true'  
  { Истина }  
  asm { mov eax, -1; push eax }  
'not' Boolean [A]  
  { Если A Ложь, то Истина, и обратно }  
  asm { pop eax; not eax; push eax }  
Boolean [A] 'and' Boolean [B]  
  { Если A и B Истина, то Истина, иначе Ложь }  
  asm { pop eax; pop edx; and eax, edx; push eax }  
Boolean [A] 'or' Boolean [B]  
  { Если A или B Истина, то Истина, иначе Ложь }  
  asm { not (not A and not B) }
```

Демонстрационные пример



Необходимо реализовать устройство управления, которое при нажатии кнопки X1 подает управляющий сигнал на открытие клапана K1. После его открытия по сигналу открытого положения X4 снимается управляющий сигнал с клапана K1 и начинает открываться клапан K2.

После его открытия по сигналу открытого положения X6 снимается управляющий сигнал с клапана K2, после чего устройство переходит в устойчивое состояние с открытыми клапанами.

В свою очередь, при нажатии кнопки X2 подает управляющий сигнал на закрытие клапана K2. После его закрытия по сигналу закрытого положения X5 снимается управляющий сигнал с клапана K2 и начинает закрываться клапан K1.

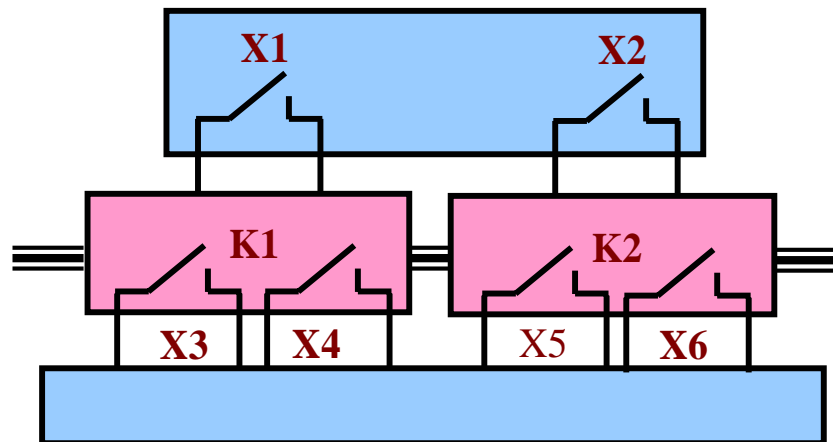
После его закрытия по сигналу закрытого положения X3 снимается управляющий сигнал с клапана K1, после чего устройство вновь переходит в устойчивое состояние с закрытыми клапанами.

Определение языка



```
1  ()()
2  "'[^']+ " [] "' {}
3  () Сигнал ()
4  'X1' [push 0201h;]{} 'X2' [push 0202h;]{} 'X3' [push 0203h;]{}
5  'X4' [push 0204h;]{} 'X5' [push 0205h;]{} 'X6' [push 0206h;]{}
6  () Команда ()
7  'Открытие K1' [push 0301h;]{} 'Заккрытие K1' [push 0302h;]{}
8  'Открытие K2' [push 0303h;]{} 'Заккрытие K2' [push 0304h;]{}
9  ()()
10 ', ' {mov eax, 100; L1: inc eax; jnz L1;} '. ' {, ,}
11 'Выдать' Команда {pop ebx; mov [ebx], 1;}
12 'Снять' Команда {pop ebx; mov [ebx], 0;}
13 'Ожидать' Сигнал {pop ebx; L2: mov eax, [ebx]; test eax, 0; je L2;}
14 'Начало' [L3: lea eax, L3; push eax;] "' 'Повторить' [pop eax; jmp eax;] {}
```

Ситуационное описание



< Начало.

Ожидать X1, Выдать Открытие K1.

Ожидать X4, Снять Открытие K1, Выдать Открытие K2.

Ожидать X6, Снять Открытие K2.

Ожидать X2, Выдать Закрытие K2.

Ожидать X5, Снять Закрытие K2, Выдать Закрытие K1.

Ожидать X3, Снять Закрытие K1.

Повторить. >

Заключение



- Существенная неполнота формально-логического метода
- Наличие трудноразрешимых проблем при практической реализации универсальных формальных теорий
- Отказ от универсальных языков формализации в пользу специальных
- Состоятельность корпусного подхода к описанию сложных предметных областей
- Техническая осуществимость и практическая эффективность создания и использования проблемных языков