Доклады 7-ой Международной конференции «Автоматизация проектирования дискретных систем» (CAD DD'2010). – Минск, 2010. – С. 10-17.

УДК 681.32

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ

В.С. Выхованец
Институт проблем управления РАН, Москва

Рассматривается аналитический синтез дискретных устройств, сведенный к аналитической декомпозиции дискретных функций, где под аналитической декомпозицией понимается представление дискретной функции в виде скобочной формулы в базисе произвольных бинарных операций. Разрабатывается методика аналитического синтеза формул, позволяющая получать наилучшие представления для подавляющего большинства функций. Описывается процедура синтеза формул, основанная на вычислении бинарных операций и мест расстановки скобок. Приводятся оценки сложности синтезируемых формул.

Введение

В отличие от большинства работ по функциональному синтезу задача аналитического синтеза имеет другую постановку, при которой с целью получения эффективных описаний дискретных устройств переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, а операции вычисляются в процессе самого синтеза. Например, в логическом управлении рассматривается единое множество значений для всех переменных и функций, а функциональные построения осуществляются в заданном базисе операций [1]. При исследовании конечных универсальных алгебр изучаются только классификация и строения алгебраических систем, а задача нахождения алгебраических операций с требуемыми свойствами не ставится [2].

Рассмотрим задачу аналитического синтеза дискретных устройств, которая сводится к нахождению эффективных формул дискретных функций путем вычисления их скобочной структуры и множества входящих операций.

1. Аналитические конструкции формул

Введем обозначения для семейства множеств $\mathbf{N}^k$ таких, что при $k=0$ имеем $\mathbf{N}^0=[0,1,2,\ldots]$ – линейно упорядоченное множество натуральных чисел, а при $k\neq 0$ получаем $\mathbf{N}^k=[0,1,\ldots,k-1]$ – линейно упорядоченные множества k первых чисел множества $\mathbf{N}^0$, где k также принадлежит $\mathbf{N}^0$.

Пусть дискретная функция f принимает значения на множестве $\mathbf{N}^{k_f}$ и зависит от переменных $\mathbf{X}=[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]$, принимающих значения на множествах $\mathbf{N}^{k_0}$, $\mathbf{N}^{k_1}$, …, $\mathbf{N}^{k_{n-1}}$ соответственно.

1.1. Каноническая конструкция

При синтезе формул дискретных функций используются различные аналитические конструкции, задающие строение этих формул. Для описания предельно общей аналитической конструкции Φ воспользуемся грамматической формой:

$$\Phi \to \Delta \mid \mathrm{X} \mid \Xi\ \Phi \mid (\Phi\ \Theta\ \Phi), \tag{1}$$

где Φ – конструируемая формула, или аксиома грамматики; $\to$ – знак вывода (текстовой замены); Δ – вхождение константы, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{N}^k$

(k фиксировано); X – вхождение переменной, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{X}$; Ξ (Θ) – вхождение произвольной унарной (бинарной) операции, а вертикальная черта используется для разделения правых частей правил вывода (после знака $\to$), имеющих одинаковую левую часть (до знака $\to$).

Определение 1. *Канонической будем называть формулу, имеющую аналитическую конструкцию* K*:*

$$\mathrm{K} \to \Delta \,|\, \Xi\ \mathrm{X} \,|\, \Psi; \quad \Psi \to \mathrm{X} \,|\, (\Psi\ \Theta\ \Psi), \tag{2}$$

где Δ *– вхождение константы,* X *– вхождение переменной,* Ξ (Θ) *– вхождение унарной (бинарной) операции,* Ψ *– каноническая подформула.*

Определение 2. *Две формулы эквивалентны, если они выражают одну и ту же функцию.*

Утверждение 1. *Для любой формулы конструкции (1) с длиной* l *существует эквивалентная ей формула с канонической аналитической конструкцией (2) и длиной, не превосходящей* l.

Определение 3. *Аналитические конструкции эквивалентны, если множества порождаемых ими формул равны.*

Утверждение 2. *Каноническая аналитическая конструкция (2) эквивалентна модифицированной канонической аналитической конструкции* M*:*

$$\mathrm{M} \to \Delta \,|\, \Xi\ \mathrm{X} \,|\, \Psi; \quad \Psi \to \mathrm{X} \,|\, (\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi) \,|\, ((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\ \Theta\ \Psi).^{1} \tag{3}$$

1.2. Канонизация формул

Для приведения формулы общего вида (1) к представлению (3) воспользуемся процедурой, которую поясним на примере. Для этого выполним канонизацию формулы $(\neg_0 x_0 \bullet_0 (\neg_1 x_1 \bullet_1 \neg_2 x_2))$, представленной в следующем виде:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_2 \right). \tag{4}$$

Из (4) находим, что применение унарной операции $\neg_1$ к переменной x_1 эквивалентно такому преобразованию бинарной операции $\bullet_2$, при котором вместо нулевой строки ее матрицы берется строка 1, вместо первой строки – строка 0, а вместо второй строки копируется строка 1. В результате описанных преобразований имеем

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \left(x_1 \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь выполнение унарной операции $\neg_2$ эквивалентно перестановке столбцов матрицы операции $\bullet_2$,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

---

[1] Справедливо более сильное утверждение относительно конструкции M. Можно показать, что конструкция K эквивалентна конструкции M, в которой вхождение переменной X в подформулу ($\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi$) означает отсутствие вхождений этой переменной в Ψ. Однако такая конструкция выражается контекстно-зависимой грамматикой и плохо обозрима.

Проанализируем теперь бинарную операцию в круглых скобках. Находим, что ее значность равна 2. Следовательно, при вычислениях следующей бинарной операции (расположена слева от скобок) используются только первые два ее столбца. Поэтому последний столбец может быть удален, что эквивалентно снижению значности этой операции

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} \left(x_1 \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь унарная операция $\neg_0$ вызывает перестановку строк [1 2 0] бинарной операции $\bullet_1$

$$x_0 \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix} \left(x_1 \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В итоге получаем каноническую формулу $x_0 \circ_1 (x_1 \circ_2 x_2)$, где

$$\circ_1 = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix},\ \circ_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

2. Аналитический синтез

Пусть функция f значности k_f задана вектором значений $\mathbf{F}$, вектором значностей переменных $\mathbf{K}$ и вектором их знаков (имен, обозначений) $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{F} = [f_q \mid f_q \in \mathbf{N}^{k_f}; q = \overline{0, m-1}];\ \ \mathbf{K} = [k_i \mid k_i \in \mathbf{N}^0; i = \overline{0, n-1}];\ \ \mathbf{X} = [x_i \mid i = \overline{0, n-1}], \quad (5)$$

где для корректного задания функции выполняется следующее условие:

$$m = \prod_{i=0}^{n-1} k_i\ . \quad (6)$$

2.1. Исходное представление

Установим стандартное взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{\Lambda}$, состоящим из m векторов значений переменных вида $\mathbf{\lambda} = [\lambda_i \mid \lambda_i \in \mathbf{N}^{k_i}; k_i \in \mathbf{K}; i = \overline{0, n-1}]$ и вектором функции $\mathbf{F}$, следующим образом:

$$\mathbf{F}[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = f_q, \quad q = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \prod_{j=0}^{i-1} k_j\ , \quad (7)$$

куда при вычислениях вместо вхождений знаков переменных x_i подставляются их значения λ_i.

Для обратного преобразования индекса элемента $q \in \mathbf{N}^m$ в вектор значений переменных $\mathbf{\lambda} = [\lambda_i \mid i = \overline{0, n-1}]$ воспользуемся рекуррентным правилом

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= q_i \bmod k_i; \\ q_{i+1} &= q_i \operatorname{div} k_i; \end{aligned}\right\} \quad (i = \overline{0, n-1}) \quad (8)$$

с начальным условием $q_0 = q$.

Определение 4. *Представлением функции* f *называется упорядоченное множество* $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$*, где* $\mathbf{F}$ *– вектор значений функции,* $\mathbf{K}$ *– вектор значностей переменных,* $\mathbf{X}$ *– вектор знаков переменных.*

2.2. Процедура синтеза

Определение 5. *Пусть заданы два вектора равной длины* $\mathbf{F} = [f_i \mid i = \overline{0, m-1}]$ *и* $\mathbf{G} = [g_i \mid i = \overline{0, m-1}]$. *Растоянием между* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *относительно отношения эквивалентности элементов векторов* $\equiv$ *называется значение функции* $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \in N^m$*, равное количеству элементов* $\mathbf{F}$*, не эквивалентных соответствующим элементам* $\mathbf{G}$*,*

$$d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta(f_i, g_i), \quad \delta(a, b) = \begin{cases} 0, & a \equiv b; \\ 1, & a \not\equiv b. \end{cases}$$

Процедура 1. Аналитический синтез канонической формулы дискретной функции f, заданной представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) если $\mathbf{F} = [c\, c \ldots c]$, т. е. вектор функции состоит из константы c, то завершаем процедуру с формулой c (первое правило аналитической конструкции 3);

2) если $\mathbf{X} = [x_i]$, то завершаем процедуру с формулой x_i при $\mathbf{F} = [0\, 1 \ldots k_i - 1]$ (второе правило из 3), или $\neg x_i$ – в противном случае (третье правило), где k_i – значность переменной x_i, $\neg$ – искомая унарная операция, $\neg = [c_s \mid c_s = f_s; s = \overline{0, k_i - 1}]$, а f_s ($s = \overline{0, k_i - 1}$) – элементы вектора $\mathbf{F}$;

3) в противном случае найдем переменную $x_i \in \mathbf{X}$, бинарную операцию $\otimes$ и представление $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ функции f' такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $x_i \otimes f'$ отстоит на наименьшее расстояние d от вектора $\mathbf{F}$ (четвертое правило из 3);

4) если $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = 0$, то завершаем процедуру с формулой $(x_i \otimes f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'])$, которую предварительно канонизируем, где $f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ – рекурсивный вызов настоящей процедуры для функции f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ (пятое правило из 3);

5) если $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) > 0$, то найдем бинарную операцию $\oplus$ и представление $[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$ функции f'' такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $(x_i \otimes f') \oplus f''$ равен вектору $\mathbf{F}$ (шестое правило из 3); завершаем процедуру с формулой $((x_i \otimes f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']) \oplus f[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}''])$, которую предварительно канонизируем, где $f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ – рекурсивный вызов настоящей процедуры для функции f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$, а $f[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$ – для функции f'' с представлением $[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$. ♦

Шаги 1) и 2) процедуры 1 тривиальны. Разъяснение остальных шагов процедуры приведено далее.

2.3. Начальное приближение

На шаге 3) процедуры 1 выделяется некоторая переменная x_i и находится операция $\otimes$ и функция f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $g = x_i \otimes f'$ отстоит на наименьшее расстояние от исходного вектора $\mathbf{F}$. Предварительно найдем такое представление $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ функции f' и операцию $\otimes$, что $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор значений формулы g,

$$g = [\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i, \quad x_i \in \mathbf{X}, \quad x_i \notin \mathbf{X}'.^2 \qquad (9)$$

Процедура 2. Синтез формулы вида (9) для функции f, заданной представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) пусть x_i – последняя переменная в векторе $\mathbf{X} = [\ldots x_j\ x_i]$, а k_i – ее значность, т. е. $\mathbf{K} = [\ldots k_j\ k_i]$;

2) вычислим матрицу операции $\otimes$ следующим образом:

$$\otimes = [p_{st} \mid p_{st} = f_q,\ q = s + tK_i,\ s = \overline{0, K_i - 1},\ t = \overline{0, k_i - 1}] \qquad (10)$$

где f_q – q-й элемент вектора $\mathbf{F}$, $K_i = m / k_i$, m – длина вектора $\mathbf{F}$;

3) найдем представление $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ функции f':

$$\mathbf{F}' = [f_t' \mid f_t' = t; t = \overline{0, K_i - 1}]; \quad \mathbf{K}' = [\ldots, k_j]; \quad \mathbf{X}' = [\ldots, x_j];$$

4) возвращаем результирующую формулу $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$. ♦

Утверждение 3. *Вектор значений* $\mathbf{G}$ *формулы (9), синтезируемой с помощью процедуры* 2*, равен вектору исходной функции* $\mathbf{F}$.

2.4. Редукция формул

В общем случае функция f', найденная с помощью процедуры 2, имеет большую значность, чем значность аналитической конструкции k.

Определение 6. *Редукцией формулы вида (9) называется такое ее преобразование, при котором вектор значений редуцированной формулы отстоит на наименьшее расстояние от вектора значений исходной формулы, а значность функции* f' *не превосходит некоторого числа* k *– значности аналитической конструкции. Редукция будет точной, если итоговая формула эквивалентна исходной, в противном случае – неточной.*

Процедура 3. Редукция значности k формулы вида (9), заданной функцией f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ и операцией $\otimes$:

1) находим C – множество классов эквивалентности строк матрицы $\otimes$, $C = \{C(\mathbf{r}_0), C(\mathbf{r}_1), \ldots, C(\mathbf{r}_{s-1})\}$, где $\mathbf{r}_j$ ($j = \overline{0, s-1}$) – образцовые строки, разбивающие множество строк матрицы $\circ_i$ на взаимно непересекающиеся подмножества $C(\mathbf{r}_j)$;

2) создаем из C вектор классов эквивалентности с номерами строк $\mathbf{C}$, для этого:

– преобразуем классы $C(\mathbf{r}_j)$ во множества C_j ($j = \overline{0, s-1}$), состоящие из номеров эквивалентных строк;

– выполняем сортировку множеств C_j в порядке не возрастания количества принадлежащих им элементов, в результате чего имеем вектор $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = [C_0, C_1, \ldots, C_{s-1}]$;

3) редуцируем операцию $\otimes$, т. е. преобразуем ее матрицу к виду, содержащему по одной строке из первых k классов $\mathbf{C}$, и модифицируем вектор $\mathbf{F}'$:

---

[2] Далее вместо формул вида $x_i \otimes f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ будем использовать формулы вида $f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$, которые становятся эквивалентными после транспонирования матрицы операции $\otimes$.

– t-я строка матрицы $\otimes$ является строкой $\mathbf{r}_t$ из класса эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$);

– каждый элемент $c < k$ вектора $\mathbf{F}'$ заменяем номером класса эквивалентности t таким, что $c \in C_t$;

– каждый элемент $c \geq k$ вектора $\mathbf{F}'$, классы эквивалентности C_j ($j = \overline{k, s-1}$) которых исключены из рассмотрения, заменяем множеством номеров $\{t \mid t < k\}$ классов эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$), строки которых $\mathbf{r}_t$ отстоят на наименьшее расстояние от строк $\mathbf{r}_j$ с номерами исключенных классов C_j таких, что $c \in C_j$. ♦

2.5. Перестановка переменных

Количество классов эквивалентности строк операции $\otimes$, которая строится с помощью процедуры 3, зависит от последней переменной в исходном представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$. По этой причине перед редукцией будем искать такое представление $[\widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{\mathbf{K}}, \widetilde{\mathbf{X}}]$, которое эквивалентно исходному, но минимизирует число классов эквивалентности строк матрицы операции $\otimes$.

Процедура 4. Перестановка переменных в представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) пусть задана перестановка переменных $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{S} = [s_i \mid s_i \in \mathbf{N}^n; s_i \not\equiv s_j \text{ при } i \neq j; i = \overline{0, n-1}];$$

2) применим перестановку $\mathbf{S}$ к вектору $\mathbf{K}$ ($\mathbf{X}$), в результате чего получим вектор $\widetilde{\mathbf{K}}$ ($\widetilde{\mathbf{X}}$);

3) выполним для каждого элемента f_q вектора значений $\mathbf{F} = [f_q \mid q = \overline{0, m-1}]$ следующие действия:

– найдем для q соответствующий ему вектор значений переменных $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i \mid i = \overline{0, n-1}]$, для чего воспользуемся рекуррентным правилом (8) при векторе значностей переменных, равном $\mathbf{K}$;

– применим перестановку $\mathbf{S}$ к вектору $\boldsymbol{\lambda}$ и получим вектор $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$;

– вычислим для $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ новое значение индекса $\widetilde{q}$, воспользовавшись формулой (7) при векторе значностей переменных, равном $\widetilde{\mathbf{K}}$;

– запишем элемент f_q в позицию $\widetilde{q}$ выходного вектора $\widetilde{\mathbf{F}}$;

4) завершаем процедуру с новым представлением $[\widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{\mathbf{K}}, \widetilde{\mathbf{X}}]$. ♦

Утверждение 4. *Представление* $[\widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{\mathbf{K}}, \widetilde{\mathbf{X}}]$*, полученное с помощью процедуры* 4 *при произвольной перестановке переменных в представлении* $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$*, эквивалентно* $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$.

Процедура 5. Поиск наиболее близкой формулы значности k и вида $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$ для функции f с представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) найдем с помощью процедуры 2 исходную формулу g для функции f, $g = [\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_t$, где x_t – последняя переменная в векторе $\mathbf{X}$;

2) выполняем с помощью процедуры 3 редукцию формулы g при значности k;

3) подсчитываем и запоминаем $d(\mathbf{F},\mathbf{G})$ – расстояние между вектором $\mathbf{F}$ и вектором значений $\mathbf{G}$ формулы g;

4) если в последней позиции вектора $\mathbf{X}$ побывали все переменные, то переходим к шагу 5), иначе вычисляем с помощью процедуры 4 новое представление $[\mathbf{F},\mathbf{K},\mathbf{X}]$ при циклическом сдвиге переменных вправо и повторяем вычисления, начиная с шага 1);

5) выбираем перестановку переменных с наименьшим значением $d(\mathbf{F},\mathbf{G})$ и завершаем процедуру с формулой $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']\otimes x_i$, соответствующей этой перестановке. ♦

Утверждение 5. *Пусть задана формула* $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']\otimes x_i$, *полученная из представления* $[\mathbf{F},\mathbf{K},\mathbf{X}]$ *с помощью процедуры* 2. *Тогда количество классов эквивалентности строк операции* $\otimes$ *не зависит от перестановок переменных в* $[\mathbf{F},\mathbf{K},\mathbf{X}]$, *кроме тех, которые затрагивают переменную* x_i.

2.6. Вычисление остатка

Если на шаге 4) процедуры 1 окажется, что получена формула g, которая не эквивалентна идентифицируемой функции f, т. е. вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $g = f'\otimes x_i$ не равен вектору значений $\mathbf{F}$ функции f, то выполним шаг 5) и найдем бинарную операцию $\oplus$ и остаточный вектор $\mathbf{F}''$ такие, что $\mathbf{G}\oplus\mathbf{F}''=\mathbf{F}$.

Процедура 6. Построение операции $\oplus$ и остаточного вектора $\mathbf{F}''$ по векторам $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$:

1) находим количества вхождений e_{st} упорядоченных множеств $[s,t]$ ($s,t=\overline{0,k-1}$) во множество $\{[f_i,g_i] \mid i=\overline{0,m-1}\}$, порожденное векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, и строим матрицу $\oplus=[e_{st} \mid s,t=\overline{0,k-1}]$;

2) каждую строку $\mathbf{r}_s=[e_{st} \mid t=\overline{0,k-1}]$ матрицы $\oplus$ заменяем перестановкой номеров ее столбцов, переводящую элементы этой строки в монотонно невозрастающую последовательность с отношением порядка, заданным на множестве $\mathbf{N}^k$, в результате чего получаем матрицу искомой операции $\oplus$;

3) формируем m уравнений вида $g_i\oplus f_i''=f_i$ ($i=\overline{0,m-1}$) и после их решения относительно f_i'' находим элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$, $\mathbf{F}''=[f_0''f_1''\ldots f_{m-1}'']$. ♦

Утверждение 6. *Пусть заданы два вектора* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *с длиной* m *и значностью* k. *Тогда для группоида* $[\mathbf{N}_k,\oplus]$ *и остаточного вектора* $\mathbf{F}''$, *получаемых в процедуре 6, справедливы следующие высказывания:*

а) для любых элементов a *и* b *группоида* $[\mathbf{N}_k,\oplus]$ *существует единственный принадлежащий ему такой элемент* c, *что* $a\oplus c=b$;

б) вектор $[e_s \mid s=\overline{0,k-1}]$, *составленный из количеств вхождений* $e_s\in\mathbf{N}^{m+1}$ *элементов* $s\in\mathbf{N}^k$ *в остаточный вектор* $\mathbf{F}''$, *является монотонно невозрастающим, т. е.* $e_t\geq e_s$ *для всех* $t\leq s$.

Таким образом, при вычислении остатка часто встречающиеся элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$ кодируются меньшим числом, а редко встречающиеся – большим. Если элемент не встретился ни разу, то он будет закодирован наибольшим числом, что равносильно снижению значности функции, выраженной вектором $\mathbf{F}''$.

2.7. Пример аналитического синтеза

Пусть требуется реализовать дискретное устройство для вычисления первых 24 десятичных цифр числа $\pi \approx 3{,}14159265358979323846265$ по модулю 3. Зададим исходное представление $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$ соответствующей функции:

$$\mathbf{F} = [0111202020\,2201002021\,0202]; \quad \mathbf{K} = [2223]; \quad \mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3].$$

Выберем значность аналитической конструкции искомых формул, равную трем, т.е. опишем устройство в двоичной и троичной логике. Применив к представлению функции процедуру 1, имеем формулу

$$((x_1 \otimes_0 (x_2 \otimes_1 (x_0 \otimes_2 x_3))) \oplus (x_1 \otimes_4 (x_0 \otimes_5 (x_3 \otimes_6 x_2)))),$$

которую можно реализовать схемой из найденных элементов-операций

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\otimes_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \otimes_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \otimes_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \oplus = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Оценка сходимости и сложности

Рассмотрим аналитическую конструкцию (3) и найдем количество применений правила $\Psi \to ((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\ \Theta\ \Psi)$ при синтезе. Применив t раз правило $\Psi \to ((\mathrm{X} \otimes \Psi) \oplus \Psi)$ и один раз правило $\Psi \to (\mathrm{X} \otimes \Psi)$ к последним вхождениям Ψ, получим

$$\Psi \to ((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 ((\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2) \oplus_2 (\ldots \oplus_t (\mathrm{X}_{t+1} \otimes_{t+1} \Psi_{t+1}) \ldots))). \tag{11}$$

Для простоты будем предполагать, что аналитическая конструкция, функция и ее переменные имеют одинаковую значность, равную k. Тогда длина вектора функции, выражаемого формулой Ψ, равна k^n, а формами Ψ_i $(i = \overline{1, t+1})$ – k^{n-1}. Подсчитаем число функций N_t от n переменных, выражаемых формулой (11) при различных t.

При $t = 1$ операция $\otimes_1$ состоит из k строк длины k, а матрица функции Ψ – из k^{n-1} строк длины k. Тогда количество функций, выражаемых формулами вида $(\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$, равно количеству вариантов составления матрицы Ψ из k строк операции $\otimes_1$, или $k^{k^{n-1}} - N_0$, где $N_0 = k^k$ – начальное условие, или число функций, выражаемых более простыми формулами вида Δ, X и $\Xi\ \mathrm{X}$.

При $t = 2$ операции $\otimes_1$ и $\otimes_2$ совместно с операцией $\oplus_1$ порождают k^2 различных строк, из которых можно составлять матрицу функции Ψ. Тогда количество функций, выражаемых формулами вида $((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 (\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2))$, равно $(k^2)^{k^{n-1}}$, за вычетом функций, выражаемых формулой $(\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$, $N_2 = k^{2k^{n-1}} - N_1$.

Продолжая таким образом, при любом $t > 1$ имеем

$$N_p = (k^p)^{k^{n-1}} - N_{p-1} = k^{pk^{n-1}} - k^{(p-1)k^{n-1}}.$$

Следует заметить, что максимально возможное значение числа шагов декомпозиции t равно k. В этом случае формулой вида (11) выражаются все нетривиальные функции,

Доклады 7-ой Международной конференции «Автоматизация проектирования дискретных систем» (CAD DD'2010). – Минск, 2010. – С. 10-17.

$$\sum_{t=1}^{k} N_t = k^{k^n} - N_0 \,,$$

а среднее значение $\bar{t}$ близко k

$$\bar{t} = \frac{1}{k^{k^n} - N_0} \sum_{t=1}^{k} t N_t \approx k(1 - \frac{1}{k^{1+k^{n-1}}})\,. \qquad (12)$$

Однако реальное значение $\bar{t}$ меньше найденного в (12), так как при синтезе формул (процедура 1) используется минимизация, осуществляемая путем циклического сдвига переменных (процедура 5), и вычисление наилучшей операции $\oplus$ (процедура 6). По этой причине для оценки среднего числа шагов декомпозиции $\bar{t}$ будем использовать эмпирическую формулу

$$\bar{t} \cong k(1 - \frac{1}{n-1})\,, \qquad (13)$$

которая хорошо согласуется с результатами вычислительного эксперимента.

Теперь осталось оценить среднюю длину формул L_n. Из структуры формулы (11) и выражения (13) следует рекуррентное уравнение для L_n

$$L_n = \frac{n-1}{n} k\left(L_{n-1} + 2\right) - 1\,. \qquad (14)$$

Из (14) при очевидном начальном условии $L_2 = 1$ непосредственно выводится выражение для средней длины формул L_n

$$L_n = \frac{6k^2 - 9k + 4}{k^2(k-1)^2} \frac{k^n}{n} - \frac{k^2}{(k-1)^2} \frac{1}{n} - \frac{k}{(k-1)} \frac{n-1}{n} - 1\,. \qquad (15)$$

В частности, из (15) может быть получена асимптотическая сложность формул булевых функций $L \sim 2{,}5 \cdot 2^n / n$, которая согласуется с другими известными оценками [3]. Уточненная оценка сложности аналитического синтеза приведена в работе [4].

Список литературы

1. Шалыто, А.А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов / А.А. Шалыто. – СПб.: Наука, 2000. – 780 с.

2. Хобби, Д. Строение конечных алгебр / Д. Хобби, Р. Макензи. – М.: Мир, 1993. – 286 с.

3. Кириченко, К.Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций / К.Д. Кириченко // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17, вып. 3. – С. 80–88.

4. Выхованец, В.С. Алгебраическая декомпозиция дискретных функций / В.С. Выхованец // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 20–56.