

Аналитический синтез формул

Прикладной аспект

<http://valery.vykhovanets.ru>

План лекции

I

- Постановка задачи

II

- Основные определения

III

- Алгебраический синтез

IV

- Спектральный метод

V

- Аналитический синтез

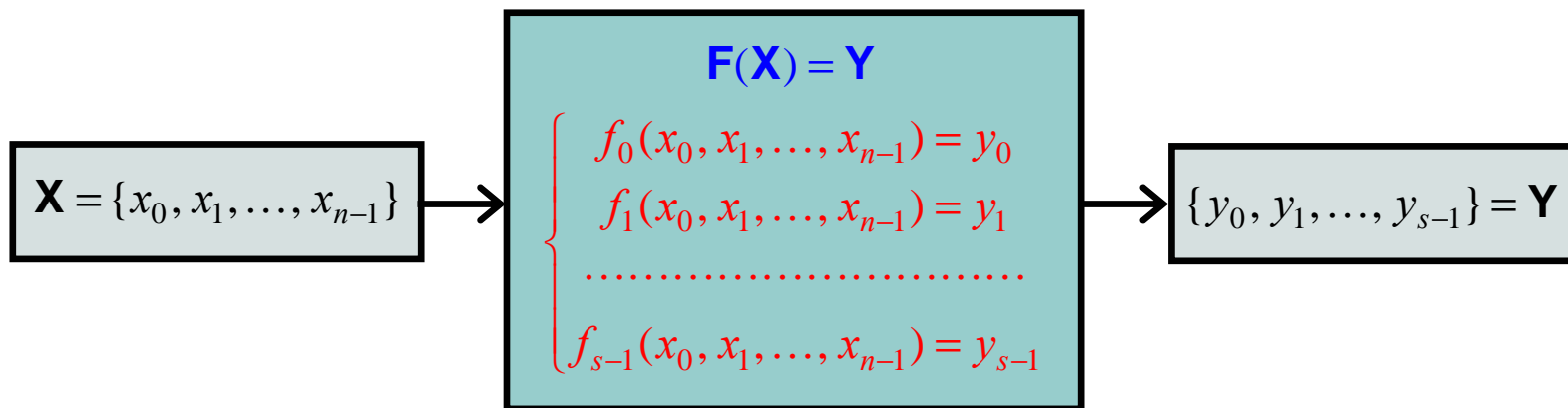
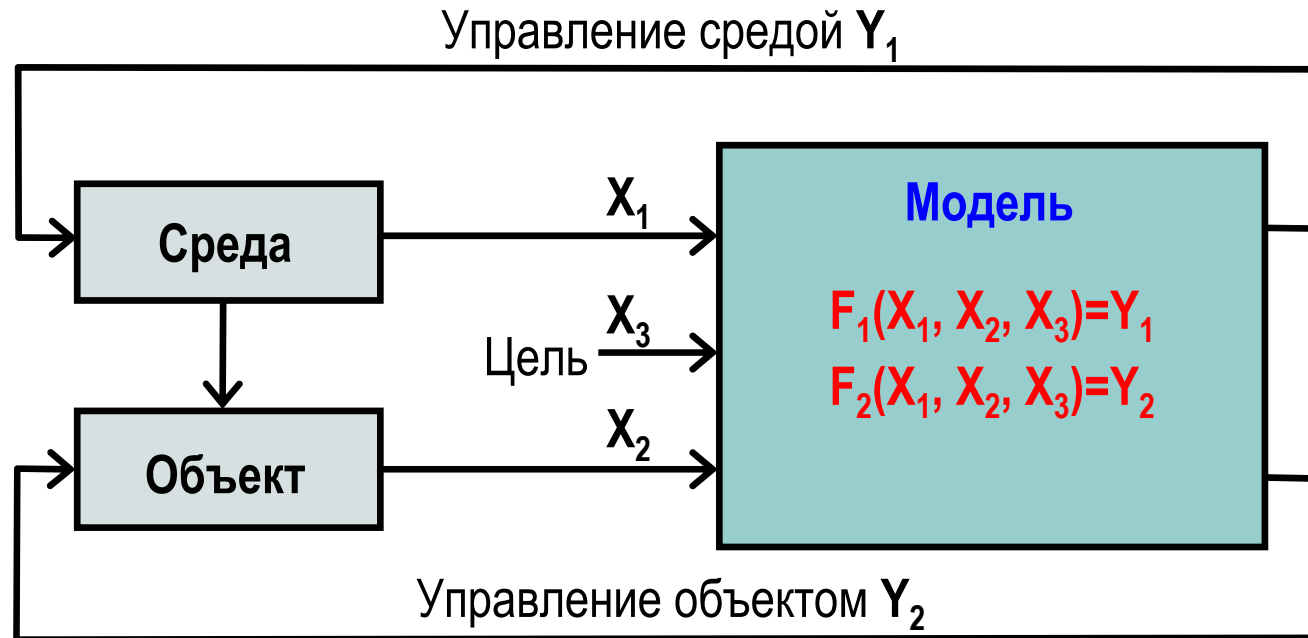
VI

- Сложность формул

VII

- Выводы

I Постановка задачи



II Дискретные функции

$$N_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

$$f(x) : N_{k_x} \rightarrow N_{k_f}$$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) : N_{k_0} \times N_{k_1} \times \dots \times N_{k_{n-1}} \rightarrow N_{k_f}$$

x	$f(x)$
0	f_0
1	f_1
...	...
$k-1$	f_{k-1}

x_0	x_1	...	x_{n-1}	$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$
0	0	...	0	f_0
1	0	...	0	f_1
...
k_0-1	k_1-1	...	$k_{n-1}-1$	f_{k-1}

II Пример 1. Функции

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	1
3	0

$$x \in N_4, \quad N_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) \in N_2, \quad N_2 = \{0, 1\}$$

$$f(2) = 1$$

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	2
0	2	0	1
1	2	0	1
0	0	1	2
...
1	2	3	0

$$f(1, 1, 0) = 2$$

II

Дискретные операции

Унарные

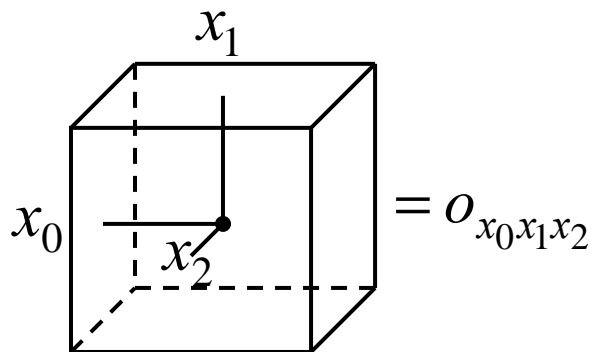
$$x_0 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k_0 - 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} o_0 \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{k_0-1} \end{bmatrix} = O_{x_0}$$

Бинарные

x_1

$$x_0 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k_0 - 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & k_1 - 1 \\ o_{00} & o_{01} & \dots & o_{0,k_1-1} \\ o_{10} & o_{11} & \dots & o_{1,k_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{k_0-1,0} & o_{k_0-1,1} & \dots & o_{k_0-1,k_1-1} \end{bmatrix} = O_{x_0 x_1}$$

Тернарные



II Пример 2. Операции

Унарная

$$x \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \neg x$$

$\neg 1 = 2$

Бинарная

$$x_0 \begin{matrix} & & x_1 \\ & 0 & 1 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{matrix} = x_0 \oplus x_1$$

$1 \otimes 1 = 0$

Тернарная

$$x_0 ? x_1 : x_2 = \begin{cases} x_1, & x_0 \neq 0 \\ x_2, & x_0 = 0 \end{cases}$$

$1 ? 0 : 1 = 0$

III

Алгебраический синтез

$$?x_0 \& ?x_1 \& ?x_2 = 1$$

x_0	x_1	x_2	f
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vee = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = x_0 \& \neg x_1 \& \neg x_2 \vee$$

$$\vee x_0 \& x_1 \& \neg x_2 \vee$$

$$\vee x_0 \& x_1 \& x_2$$

$$x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x$$

$$x \& (y \& z) = x \& (y \& z)$$

$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$$

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$$

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \& 1 = x$$

$$f(X) = x_0 \& \neg x_1 \& \neg x_2 \vee x_0 \& x_1$$



Недостатки алгебраического синтеза

- Необходимость исследования множества операций и выявления их свойств
- Отсутствие единого подхода к синтезу формульных представлений дискретных функций
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом возможных преобразований
- Ограниченное число исследованных функционально полных базисов операций

IV Пример 3. Спектральный метод

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	X	x_0	x_1	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5		d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
g_0	=	1	0	0	0	0	0	0	0	$^{-1}$	1	0	0	0	0	0
g_1	=	x_0	1	1	0	1	1	0	0	$^{-1}$	2	1	0	0	0	0
g_2	=	x_1	2	0	1	1	0	0	0	$^{-1}$	2	0	1	0	0	0
g_3	=	$x_0 \times x_1$	3	1	1	1	1	1	0	$^{-1}$	1	2	2	1	0	0
g_4	=	$x_0 \otimes x_1$	4	0	2	1	0	2	0	$^{-1}$	1	0	1	0	1	0
g_5	=	$x_1 * x_0$	5	1	2	1	1	2	2	$^{-1}$	1	1	1	1	1	1

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$$

IV Пример 3. Спектральный метод

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

		X	x_0	x_1	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	X	f	i	h
g_0	=	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_1	=	x_0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	1	1	1
g_2	=	x_1	2	0	1	2	0	1	0	0	2	0	2	0
g_3	=	$x_0 \times x_1$	3	1	1	1	2	2	1	0	3	1	3	1
g_4	=	$x_0 \otimes x_1$	4	0	2	1	0	1	0	1	4	0	4	0
g_5	=	$x_1 * x_0$	5	1	2	1	1	1	1	1	5	2	5	2

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_0 \times x_1 + x_1 * x_0 \times 2$$

IV Спектральные алгебры

Алгебра логики

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} + = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix} \quad \times = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma + x = \sigma$$

$$x + \sigma = \sigma$$

$$\sigma \times x = \sigma$$

$$\tau \times x = x$$

Мультипликативная алгебра

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} + = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix} \quad \times = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma + x = \sigma$$

$$x + \sigma = \sigma$$

Группа на $N_k \setminus \sigma$

Аддитивная алгебра

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} + = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Абелева группа

$$\sigma \times x = \sigma$$

$$\tau \times x = x$$

Фундаментальная алгебра

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} + = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{array}{c} \sigma \\ \tau \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Конечное поле или целостное кольцо

IV Пример 4. Спектральные функции

Алгебра логики

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det \mathbf{G} \neq 0!$$

Двузначные унимодальные функции

Мультипликативная алгебра

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det \mathbf{G} \neq 0!$$

Многозначные унимодальные функции

Аддитивная алгебра

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \det \mathbf{G} \neq 0?$$

Двузначные мультимодальные функции

Фундаментальная алгебра

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \det \mathbf{G} \neq 0?$$

Многозначные мультимодальные функции

- Необходимость предварительного синтеза формул спектральных функций
- Необходимость проверки совместимости спектральных функций (вычисление определителей)
- Необходимость вычисления обратных функций (обращение матриц)
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом спектральных базисов

V Аналитический синтез

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i$$

$$g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2 \circ_2 \cdots \circ_{n-2} x_{n-1}$$

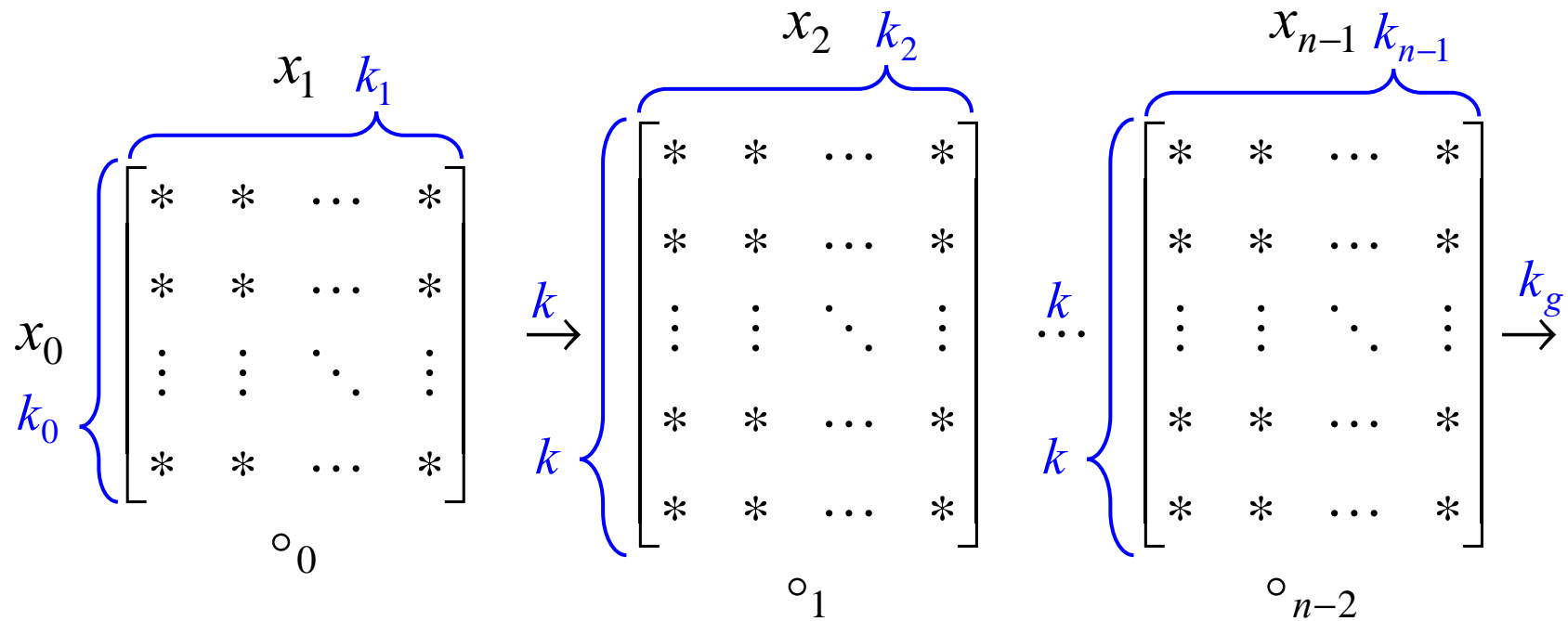
$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i_0} x_{i_1} \circ_{i_1} \cdots \circ_{i_{n-2}} x_{i_p}$$

$$\begin{cases} \text{var } \circ_{ij}; \\ \text{min } M. \end{cases}$$

V

Аналитическая конструкция

$$g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2 \circ_2 \dots \circ_{n-2} x_{n-1}$$



k - значность аналитической конструкции

$$g(X) = ((\dots((x_0 \circ_0 x_1) \circ_1 x_2) \circ_2 \dots) \circ_{n-2} x_{n-1})$$

v Пример 5. Аналитическая конструкция

$$g(x_0, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_0 * x_3 \otimes x_2$$

$$\begin{array}{c}
 x_1 \\
 k_1 = 2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_0 \\
 k_0 = 3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \oplus \\
 \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \xrightarrow{k=4}
 \begin{array}{c}
 x_3 \\
 k_3 = 4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}
 \xrightarrow{k=4}
 \begin{array}{c}
 x_2 \\
 k_2 = 3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \otimes \\
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}
 = g(X)
 \begin{array}{c}
 k_g = 3
 \end{array}$$

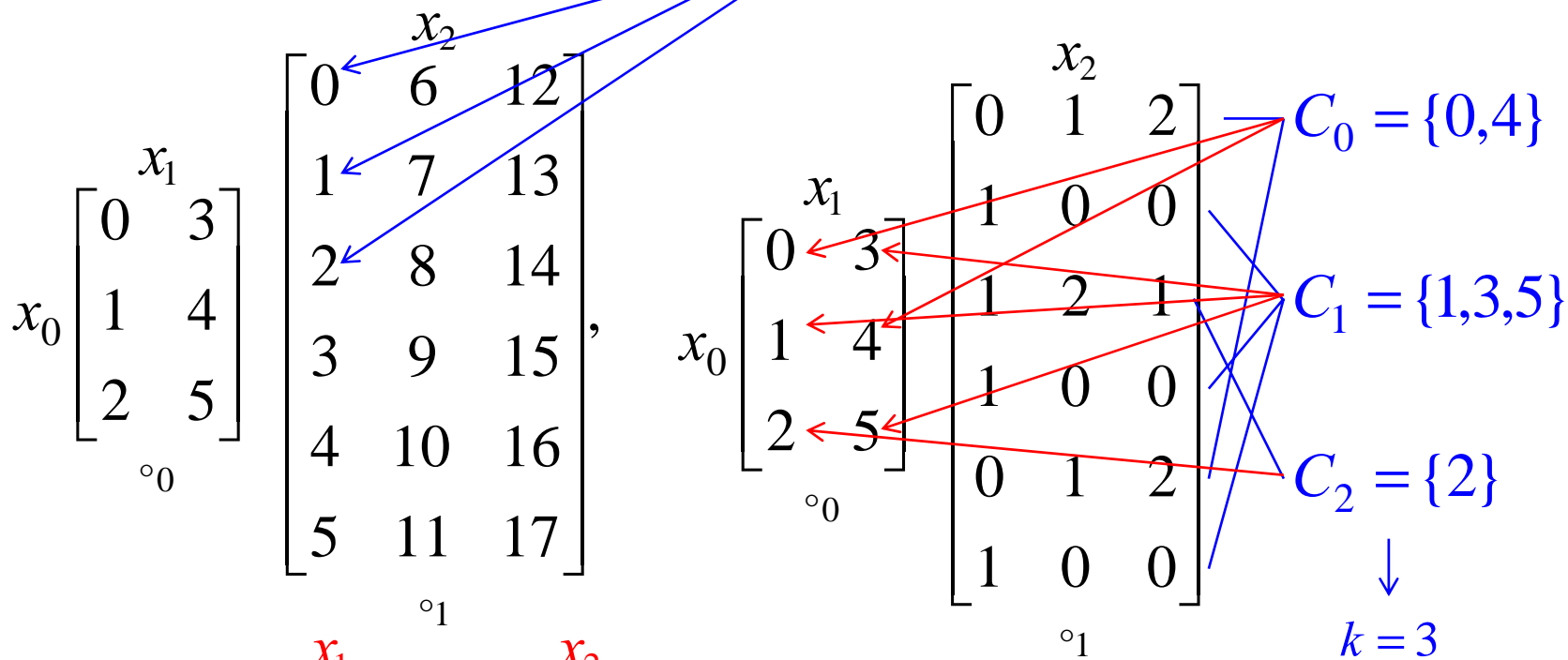
Значность аналитической конструкции $k = 4$

$$\mathbf{K} = [3234]$$

$$\mathbf{G} = [01020221201200120102201002...]$$

V Синтез спектральных функций

$$\mathbf{K} = [323], \quad \mathbf{G} = [011101102010201020]$$



$$x_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \circ_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \circ_1 x_2 = g(X), \quad g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2$$

v Остаточный вектор 1

$$\mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$\begin{array}{c}
 x_3 \\
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_0 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\
 \circ_{00}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \\
 \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ * & 2 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\
 \circ_{01}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 k=3 \\
 x_2 \\
 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 \circ_{02}
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 x_3 \\
 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \circ_{00}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \circ_{01}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_2 \\
 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \circ_{02}
 \end{array}
 = g_0$$

$$\mathbf{G}_0 = [022100222122200022000000]$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022100122121200012200002]$$

V Остаточная алгебра

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i_0} x_{i_1} \circ_{i_1} \dots \circ_{i_{n-2}} x_{i_p}$$

- Образована одной операцией (сложение)
- Позволяет решать уравнения вида:

$$g + x = f$$

$$2 + x = 1 \quad \begin{matrix} & & x \\ & 0 & 1 & 2 \\ g & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & \textcircled{1} & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & 2 & & \end{matrix} \quad x = 1$$

f

V

Синтез операции сложения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= [011120202022010020210202] \\
 \mathbf{G}_0 &= [022100222122200022000000]
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 f \\
 \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ g \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 f \\
 \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ g \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022010000200110001011101]$$

0 – 13 вхождений
 1 – 8 вхождений
 2 – 3 вхождения

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022100122121200012200002]$$

0 – 10 вхождений
 1 – 5 вхождений
 2 – 9 вхождения

VI Сложность формул

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} g_i(X') \times_i h_i(X''), \quad X = X' \cup X''$$

$$M \leq \frac{1}{k-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - k \right)^2}$$

$$M \sim \frac{1}{2} \frac{2^n}{n^2}$$

$$L \leq \frac{n}{k-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - k \right)^2}$$

$$L \sim \frac{1}{2} \frac{2^n}{n}$$

$$L_{\text{эф}} = \frac{4}{n(k - \alpha)^2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - 2\beta \right)^2 - \rho_{\text{онт}}^2}$$

$$L_{\text{эф}} \approx 4 \frac{D_y}{D_x} 2^{D_x} - 4r, \quad E = \frac{L_{\text{эф}}}{L}$$

$L_{\text{эф}}$ (L) – эффективное количество операций;

D_x (D_y) – объем входных (выходных) данных, бит;

r – разрядность вычислительного средства, бит;

E – метрика качества обработки данных.

VII Выводы

- Изучены три метода синтеза формул: алгебраический, спектральный и аналитический
- Определены достоинства и недостатки каждого из перечисленных методов
- Показано, что наименее трудоемким является аналитический метод синтеза формул
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим методом