

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
МГТУ им. Н.Э. Баумана



Аналитический синтез комбинационных схем

В.С. Выхованец, С.В. Федоров

19 апреля 2012 г.

УКИ 2012

План доклада

- Основные определения
- Аналитический синтез формул
- Преобразование операций
- Демонстрационные примеры
- Сходимость и сложность
- Выводы
- Дальнейшие исследования

Представления функций

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	2
1	1	0	1
0	2	0	0
1	2	0	1
0	0	1	1
...
1	2	3	2

$$\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [234], \quad \mathbf{F} = [0121011\dots 2]$$

Дискретные операции

Дискретная операция – дискретная функция, существенно зависящая от своих аргументов

Унарная

$$x \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \neg x$$

$\neg 1 = 2$

Бинарная

$$x_0 \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x_0 \oplus x_1$$

$1 \otimes 1 = 0$

Аналитический синтез

Формула общего вида
в базе унарных и
бинарных операций с
произвольной
расстановкой скобок

$$\Phi \rightarrow \Delta \mid X \mid \Xi\Phi \mid (\Phi\Theta\Phi)$$

Φ - формула, Δ - константа, X - переменная,
 Ξ - унарная операция, Θ - бинарная операция.

$$(\neg_0 x_0 \otimes_0 (\neg_1 x_1 \otimes_1 (\neg_2 x_2 \otimes_2 \neg_3 (x_1 \otimes_3 2))))$$

Канонический вид
формул,
эквивалентный
формулам общего
вида

$$\Phi \rightarrow \Delta \mid \Xi X \mid \Psi;$$

$$\Psi \rightarrow X \mid (X\Theta\Psi) \mid ((X\Theta\Psi)\Theta\Psi)$$

Ψ - каноническая подформула

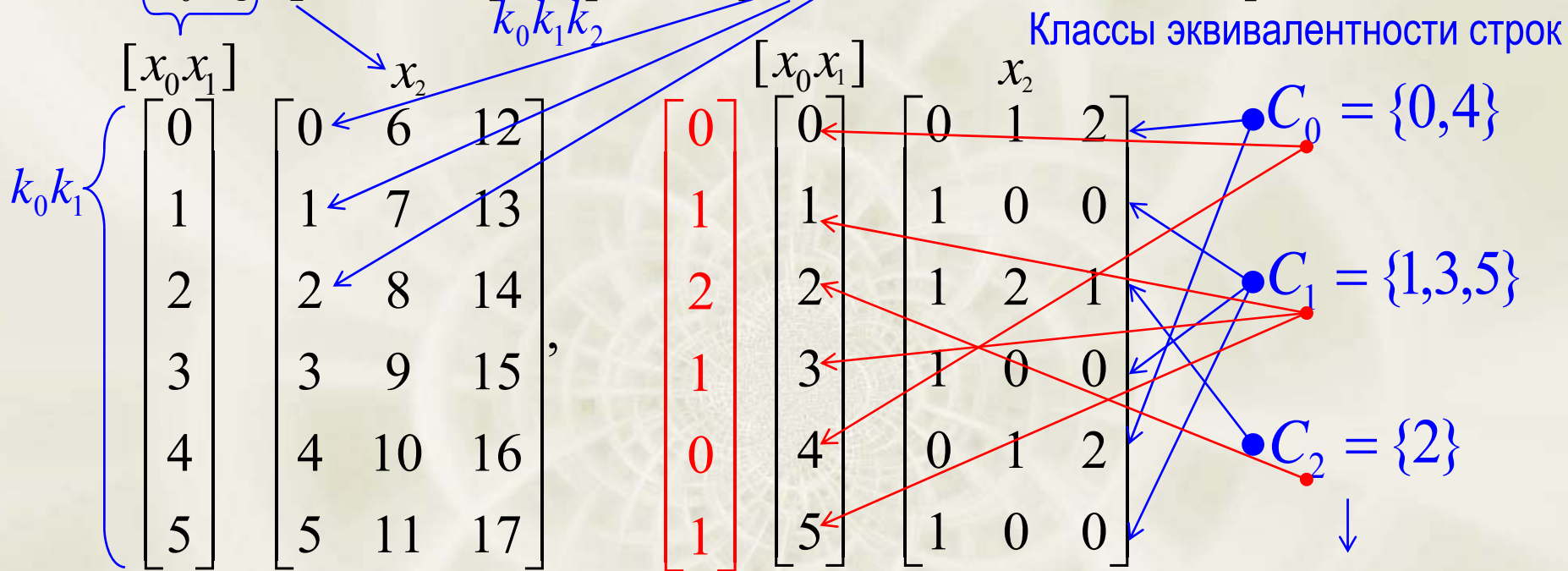
$$((x_1 \otimes_0 (x_0 \otimes_1 x_2)) \otimes_2 x_1)$$

Задача
аналитического
синтеза

$$\begin{cases} \text{var } \Theta; \\ \text{min } \Theta. \end{cases}$$

Редукция представлений

$$\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [323], \quad \mathbf{F} = [011101102010201020]$$



Значность редукции

$$f(\mathbf{X}) = \Psi(x_0, x_1) \otimes_0 x_2$$

$$f(\mathbf{X}) = (x_0 \otimes_1 x_1) \otimes_0 x_2$$

$$f(1, 1, 1) = 0$$

Циклическая перестановка

$$\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3], \quad \mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$[x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Покрытие 12

$$[x_3 \ x_0 \ x_1 \ x_2]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 18



$$[x_2 \ x_3 \ x_0 \ x_1]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 18

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 16

$$\mathbf{X} = [x_3 \ x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [3222], \quad \mathbf{F} = [022100122121200012200002]$$

Остаточный вектор

$$\mathbf{X} = [x_3 \ x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [3222], \quad \mathbf{F} = [0221001221212000122000002]$$

$[x_3 \ x_0 \ x_1]$	x_2	
1	0	2
0	2	0
0	2	0
2	1	0
1	0	1
1	0	2
1	1	2
0	2	0
0	2	0
2	1	0
0	2	0
1	1	2
Ψ_0	\mathbf{F}	

$\left[\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right]$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} k=3$
\otimes_0	

x_2	0	2
0	2	0
2	0	2
0	2	0
0	2	0
2	0	2
2	0	0
1	0	0
2	0	0
0	2	2
\mathbf{F}_0		

$f(\mathbf{X}) = f_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X})$,
 $\langle N_{k_f}, \oplus \rangle$ - группоид с обратной операцией \ominus
 (сумма по модулю 3)

$$\mathbf{F} = [0221001221212000122000002]$$

$$\mathbf{F}_0 = [0221000221202000222000002]$$

$$\mathbf{F}_1 = [00000010000100002000000000]$$

$$f(\mathbf{X}) = (\Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2) \oplus f_1(\mathbf{X})$$

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_0 = [x_3 \ x_0 \ x_1], \quad \mathbf{K}_0 = [322],$$

$$\Psi_0 = [100211100201]$$

$$\mathbf{X} = [x_3 \ x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [3222],$$

$$\mathbf{F}_1 = [00000010000100002000000000]$$

Многошаговое приближение

$$\mathbf{X} = [x_3 \ x_0 \ x_1 \ x_2], \quad \mathbf{K} = [3222], \quad \mathbf{F}_1 = [00000010000100002000000000]$$

$[x_3 \ x_0 \ x_1]$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ψ_1

\mathbf{F}_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \otimes_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_2

$$f(\mathbf{X}) = f_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X}),$$

$$f_1(\mathbf{X}) = f_2(\mathbf{X}) \oplus f_3(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{F}_1 = [00000010000100002000000000]$$

$$\mathbf{F}_2 = [00000010000100002000000000]$$

\ominus

$$\mathbf{F}_3 = [000000000000000000000000000000]$$

$$f(\mathbf{X}) = (\Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2) \oplus (\Psi_1(\mathbf{X}_1) \otimes_1 x_2)$$

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0 = [x_3 \ x_0 \ x_1], \quad \mathbf{K}_0 = [322]$$

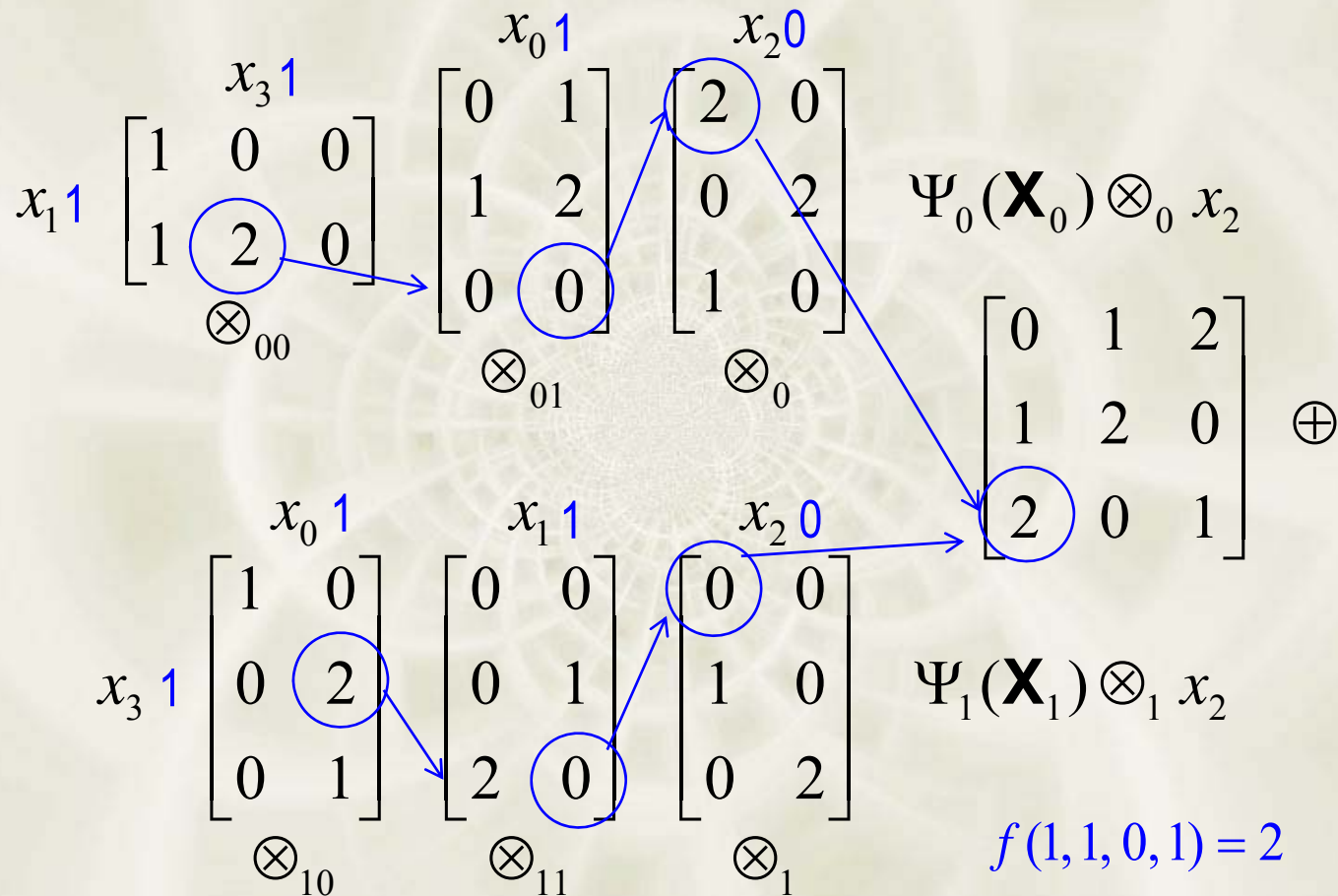
$$\mathbf{X}_1 = [x_3 \ x_0 \ x_1], \quad \mathbf{K}_1 = [322]$$

$$\Psi_0 = [100211100201]$$

$$\Psi_1 = [000200100001]$$

Рекурсия по глубине

$$f(\mathbf{X}) = (\Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2) \oplus (\Psi_1(\mathbf{X}_1) \otimes_1 x_2)$$



$$f(\mathbf{X}) = (((x_1 \otimes_{00} x_3) \otimes_{01} x_0) \otimes_0 x_2) \oplus (((x_3 \otimes_{10} x_0) \otimes_{11} x_1) \otimes_1 x_2)$$

Нахождение группоида

$$f(\mathbf{X}) = f_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X})$$

Цель – ранжирование числа вхождений элементов N_{k_f} в остаточный вектор \mathbf{F}_1 и, возможно, понижение его значности.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = [0111202020222010020210202] \\ \mathbf{F}_0 = [0221002221222000022000000] \end{cases}$$

Матрица вхождения пар значений

f_0	0	1	2	Строки \oplus -	0	1	2
	6	2	4	перестановки N_{k_f} ,	0	2	1
	1	1	0	переводящие строки	1	1	*
	2	3	5	матрицы вхождений в	2	0	1
				невозрастающие			
				последовательности			\oplus

→

Для найденной операции \oplus

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \ominus \mathbf{F}_0 = [022010000200110001011101]$$

Для суммы по модулю 3

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \ominus \mathbf{F}_0 = [022100122121200012200002]$$

0 – 13 вхождений

1 – 8 вхождений

2 – 3 вхождения

0 – 10 вхождений

1 – 5 вхождений

2 – 9 вхождений

Преобразование операций

$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\otimes_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\otimes_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\otimes_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\otimes_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\otimes_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\otimes_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\otimes_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Транспонирование операции

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}') \otimes x' \quad f(\mathbf{X}) = x' \otimes^T \Psi(\mathbf{X}')$$

2) Отрицание операции

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}') \otimes x' \quad f(\mathbf{X}) = \neg(\Psi(\mathbf{X}') \otimes x')$$

3) Отрицание левого операнда

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}') \otimes x' \quad f(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}') \otimes \neg x'$$

3) Отрицание правого операнда

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}') \otimes x' \quad f(\mathbf{X}) = \neg(\Psi(\mathbf{X}')) \otimes x'$$

Пример преобразования

$$\pi \approx 3,141592653589793$$

$$\mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3], \quad \mathbf{K} = [2222], \quad \mathbf{F} \Rightarrow [1101110011101111]$$

по модулю 2

$$f(\mathbf{X}) = ((x_0 \otimes_0 x_2) \otimes_1 x_3) \otimes_2 x_1$$

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перестановка
столбцов

$$\otimes_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Инверсия
операции

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\oplus = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \neg(((x_0 \& \neg x_2) \oplus x_3) \& x_1)$$

Программа синтеза формул

The image displays two screenshots of a software application titled "Программа синтеза формул" (Formula Synthesis Program). Both windows are titled "Пример 4.txt".

Left Window (Initial State):

- Формула:** Empty text box.
- Вектор функции:** Text box containing "012012012120201012201120012".
- Переменные:** A dropdown menu showing "x0", buttons for "+", "=", and "--", and a label "1 из 3". Below it, a text box contains "3" and "Длина функции 27".
- Унарные операции:** A dropdown menu and buttons for "+", "=", and "--".
- Бинарные операции:** A dropdown menu and buttons for "+", "=", and a square button with a minus sign.
- Сообщения:** A list of messages including: "Бинарная операция * удалена", "Бинарная операция + удалена", "Унарная операция ~ удалена", "Вычислен вектор значений: операций - 3, степеней свободы 3 - 21", and "Формула загружена из D:\Science\Papers\2010\АИТ\Аналитическая идентификация\Experiment\Пример 4.txt".
- Buttons:** "Загрузить", "Выгрузить", "Канонизация", "Синтез".

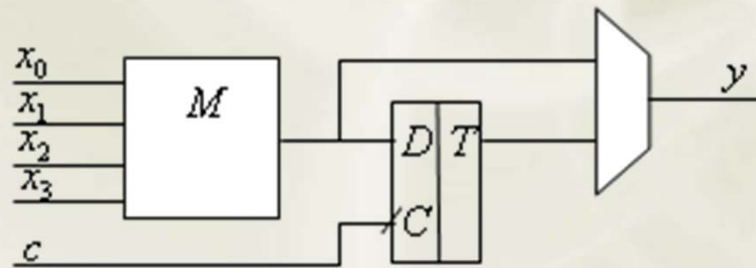
Right Window (Resulting State):

- Формула:** Text box containing "(x0 *0 (x2 *1 x1))".
- Вектор функции:** Text box containing "012012012120201012201120012".
- Переменные:** Same as the left window.
- Унарные операции:** Same as the left window.
- Бинарные операции:** A dropdown menu showing "*1", buttons for "+", "=", and "--", and a label "1 из 2". Below it, a text box contains the vector "000", "120", "210".
- Сообщения:** A list of messages including: "Вычислен вектор значений: операций - 2, степеней свободы 3 - 18", "Канонизация формулы: операций - 2, степеней свободы 3 - 18", "Выполнен синтез формулы: операций - 2, степеней свободы 3 - 18", "Бинарная операция * удалена", "Бинарная операция + удалена", and "Унарная операция ~ удалена".
- Buttons:** "Загрузить", "Выгрузить", "Канонизация", "Синтез".

A black arrow points from the left window to the right window, indicating the transition from the initial state to the resulting state.

Прикладной пример

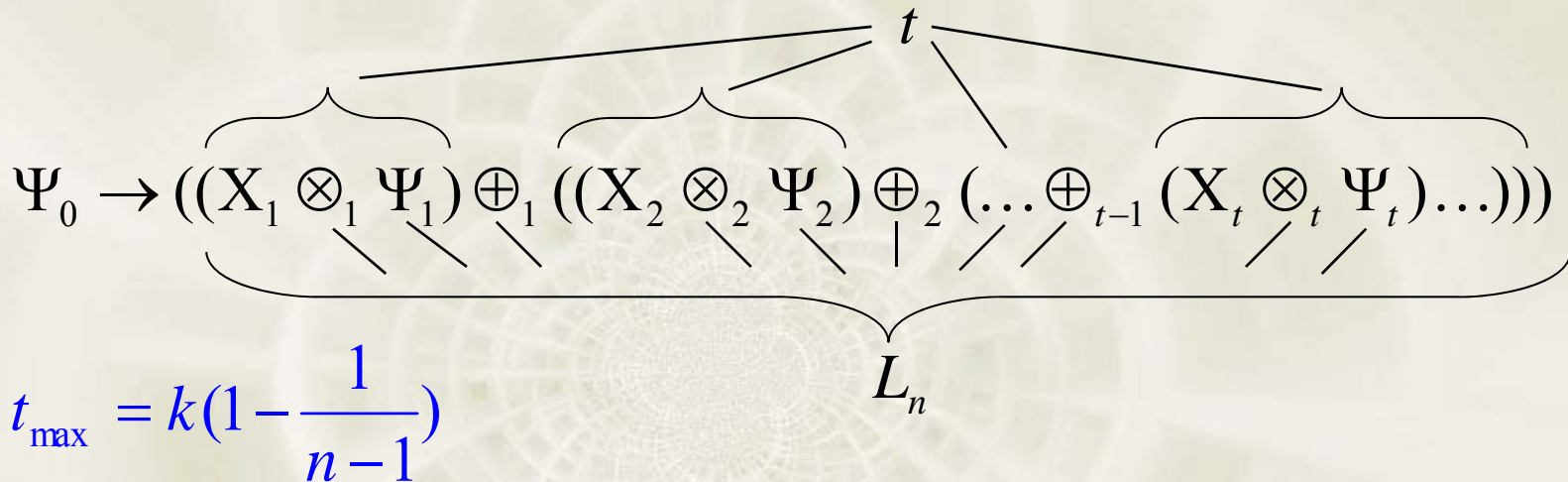
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{01}	x_{23}	x_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	3	1	0	1
0	1	0	1	0	2	2	0	1
1	1	0	1	0	3	2	0	0
0	1	1	1	0	2	3	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	2	0	1	1
1	1	0	0	1	3	0	1	0
1	1	1	0	1	3	1	1	1
0	0	0	1	1	0	2	1	1
1	1	0	1	1	3	2	1	1
1	0	1	1	1	1	3	1	0



$$f = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * \\ * & 1 & * & 0 \\ 1 & * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_4$$

Оценка сложности

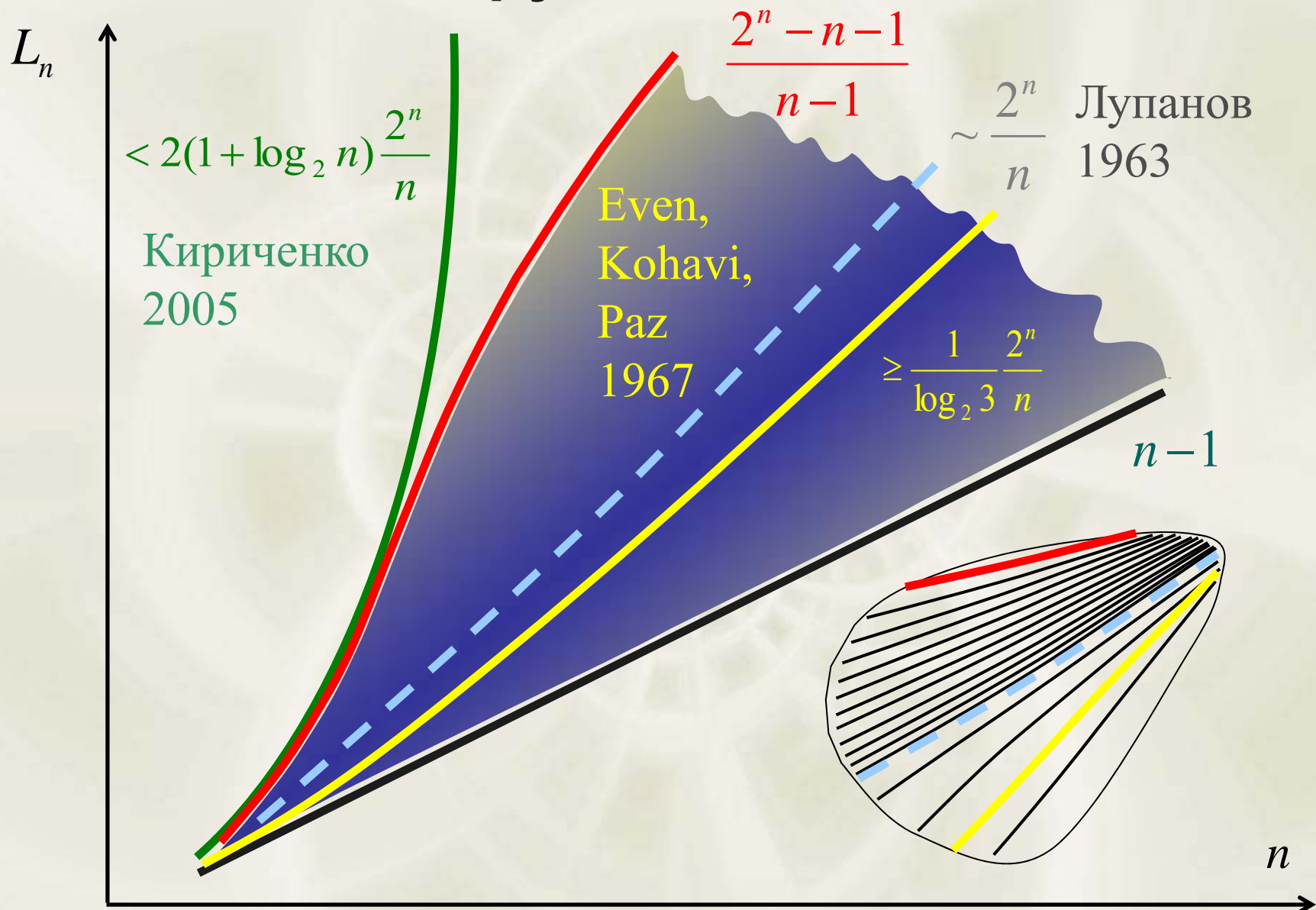
$$\mathbf{X} = [x_0 x_1 \dots x_{n-1}], \quad \mathbf{K} = [k k \dots k], \quad \mathbf{F} = [f_0 f_1 \dots f_{m-1}].$$



$$L_n(k) = \frac{2(k-1)^2 + k}{k(k-1)^2} \frac{k^{n-1}}{n-1} - \frac{k}{(k-1)^2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(k-1)} \frac{1}{n-1} \frac{n-2}{n-1} - 1$$

$$L_n(2) = \frac{2^n - n - 1}{n - 1}, \quad L_n(2) \sim \frac{2^n}{n}$$

Другие оценки



Выводы

- Разработан новый методы аналитического синтеза формул многозначных дискретных функций
- Показано применение разработанного метода для решения задачи синтеза комбинационных схем в заданном базисе операций
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим методом, которые оказались наилучшими

Дальнейшие исследования

- Минимизация комбинационных автоматов
- Совместная минимизация формул
- Табличная декомпозиция функций
- Сжатие сигналов и изображений
- Распараллеливание и конвейеризация
- Аналитическая идентификация объектов
- Оценка эффективности программ
- Прикладной анализ данных
- Архивация данных