Труды III-й Российской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ'2012, Москва). - М.: ИПУ РАН, 2012. - С. 409-415.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

А.Е. Вергер, В.С. Выхованец
Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

Рассмотрена новая динамическая логика, названная интервальной и предназначенная для представления и вывода пропозиционных свойств дискретных динамических объектов. Приведен пример описания функционирования устройства, заданного временной диаграммой. Показано, что интервальная динамическая логика имеет эффективные механизмы вывода.

Ключевые слова: интервальная логика, динамическая логика, исчисление высказываний, дискретная динамическая модель, временная диаграмма.

Введение

Существует класс задач по обработке данных, которые возникают при использовании дискретных систем управления, функционирующих в дискретном времени и описываемых дискретными сигналами. Постановка таких задач базируется на автоматных моделях с памятью, где автоматные модели представляются как состоящие из конечного автомата и запоминающих устройств с различными дисциплинами доступа: магазинный автомат строится на запоминающем устройстве со стековой организацией, машина Тьюринга – на памяти с последовательным доступом и т.п.

Несмотря на кажущуюся сложность автоматных моделей, в основе их описания лежит аппарат математической логики, но интерпретируемый во времени – описание функционирования автомата представляется в виде распределенных во времени элементарных действий, каждое из которых описывается дискретной (логической) функцией. В итоге имеем, что в теории автоматов время дискретно, а поведение автомата описывается как простая линейная последовательность событий.

Ограниченность автоматной концепции времени привела к созданию временных (темпоральных) логик, в которых непосредственно изучаются высказывания с истинностными значениями, изменяющимися во времени. Все временные логики принято делить на три класса [1]: первопорядковые, модальные и интервальные. В первопорядковой временной логике, как это имеет место и в общей теории автоматов, времени не приписывается особой роли, оно выражается лишь переменной, наряду с пространственными координатами или другими предметными переменными [2].

В модальной временной логике суть нововведений заключается в добавлении к классическим логическим связкам модальных операторов. Например, модальные операторы Until, Release, Next, Future, Globally, All и Exists логики Приора [3] выражают высказывания, истинные на точках, либо – с помощью производных операторов – на лучах времени, направленных в прошлое или будущее. Однако имеются события, которые происходят на конечных временных интервалах, поэтому чисто точечные или лучевые временные логики не могут выражать все типы высказываний.

Современные представления о времени позволяют использовать сразу несколько отношений порядка, не только «раньше», «позже», но и «строго раньше», «примыкает», «пересекается», «включает в себя» и т.д. Такие отношения используются в интервальной временной логике, где становится возможной квантификация и подстановка высказываний в качестве аргументов временных предикатов. В частности, в интервальной логике Аллена используется тринадцать базисных временных предикатов: Before, After, Meets, Met-By, Overlap, Overlapped-By, During, Includes, Starts, Started-By, Finishes, Finished-By и Equals, что позволяет выражать высказывания, не выходя за пределы языка классической логики первого порядка [4]. В этой логике атомарная формула $X \nabla Y$, где X и Y интервалы, а ∇ – временной предикат, выполнима в некоторой интерпретации, если сохраняется отношение ∇ между конечными точками интервалов. Для представления неопределенного (нечеткого) отношения между интервалами используется объединение базисных отношений, которые принадлежат множеству из 2^{13} подмножеств множества базовых интервальных отношений. В этом случае формула вида $X\,\{\nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_n\}\,Y$ выполнима в некоторой интерпретации, если все формулы $X\,\nabla_i\,Y$ ($i = 1, 2, ..., n$) выполнимы в этой интерпретации. Основным недостатком интервальных логик является наличие трудноразрешимой проблемы вывода, которая заключается в экспоненциальном (не полиномиальном) времени, необходимом для определения существования модели для заданного множества интервальных формул, а также для поиска минимального отношения для каждой пары интервалов – нахождения согласующего сценария.

Таким образом, для предметных областей, изменяющихся во времени, плохо применимыми оказались и классические и неклассические логики. Последнее связывается с тем, что в этих логиках используется статическая концепция времени, в которой моменты времени отождествляются с числами, на множестве которых задан естественный (линейный) порядок, интерпретируемый как отношение «раньше» [5]. Также постулируется, что все моменты времени существуют вместе и могут рассматриваться как единая совокупность, ни один из моментов не имеет преимуществ перед другим, а разделение событий на прошлые, настоящие и будущие условно и зависит от выбора точки отсчета. Все это, в частности, приводит к известной проблеме отражения времени в современных интеллектуальных системах [6].

Противоположный подход базируется на динамической концепции времени, постулирующей существование только выделенного момента времени – настоящего, однозначно разделяющего прошлое и будущее, причем прошлое считается уже не существующим, а будущее – еще не существующим. В этом случае время непрерывно «течет», т.е. постулируется «стрела времени» и необратимость времени [7].

Типичным примером динамической логики может служить пропозиционная динамическая логика Пратта [8], используемая для описания поведения программ. Логика Пратта – это модальная логика, порожденная идеей связать каждую программу α с некоторой ее модальностью $[\alpha]$. Синтаксически язык этой логики содержит два типа переменных: пропозиционные переменные и программы. Модальные операторы применимы к программам и включают операторы композиции $\alpha\,;\beta$ (выполнение α, потом β), объединения $\alpha \cup \beta$ (выполнение α или β) и итерации $\alpha *$ (зацикливание α), где α и β – некоторые программы. Для преобразования пропозиционного высказывания A в программу используется оператор теста $A?$, который интерпретируется так: если A истинно, то программа $A?$ завершается, иначе ничего не выполняется. Для преобразования программы в пропозиционное высказывание используется оператор $[\alpha]A$, интерпретируемый так: каждое выполнение программы из любого состояния предметной области делает это состояние таким, что выполняется A. Например, условный оператор $\text{if}\ A\,\text{then}\,\alpha\,\text{else}\,\beta$ языков программирования может быть описан в логике Пратта как $(A?;\alpha) \cup (\neg A?;\beta)$. Очевидным недостатком такой логики является то, что состояние предметной области, которые изменяют программы, не имеет явного выражения в ее языке. Для описания таких состояний применяется другая формальная теория – модель Крипке M вида $< S, V, T >$, где S – конечное множество абстрактных состояний, V – отображение, сопоставляющее каждой пропозиционной формуле множество ее абстрактных состояний, а T – отображение, сопоставляющее каждой программе некоторое множество ее траекторий, понимаемых как конечные последовательности абстрактных состояний. Для описания семантики формул логики Пратта в модели Крипке используются достаточно сложные правила интерпретации: $s \in V(A \,\&\, B) \leftrightarrow s \in V(A) \,\&\, s \in V(B)$, и т.п., а также $T(\alpha \cup \beta) \to T(\alpha) \cup T(\beta)$, $T(\alpha\,;\beta) \to T(\alpha) \cdot T(\beta)$, и т.п., где s – некоторое состояние, а операции $\cup$ и $\cdot$ – соответственно объединение и стыковка траекторий.

Настоящая работа посвящена новой временной логике, реализующей динамическую концепцию времени и сохраняющей интервальное его описание.

1. Синтаксис

Синтаксис интервальной динамической логики базируется на счетном множестве Φ атомарных формул – предметных (пропозиционных) переменных A, B, …, возможно с индексами. Составные формулы определяются следующим образом:

– каждая атомарная формула из Φ есть формула;

– 0 есть формула;

– если φ – формула, то и $\neg\varphi$ является формулой;

– если φ и ψ – формулы, то и $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rhd \psi)$ и $(\varphi \lhd \psi)$ формулы.

Константа 1 и операции $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$ определяются традиционным образом: $1 \sim \neg 0$, $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, $\varphi \oplus \psi \sim \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, где φ и ψ – формулы, а $\sim$ – знак синтаксической эквивалентности (подстановки).

Аксиоматика интервальной динамической логики наследует аксиоматику исчисления высказываний [9] и включает следующие дополнительные группы аксиом:

И0) $\neg(\varphi \rhd \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \lhd \neg\psi$, $\neg(\varphi \lhd \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \rhd \neg\psi$;

И1) $\varphi \rhd \neg\psi \leftrightarrow (\varphi \lhd \psi) \& (\psi \rhd \neg\psi)$, $\varphi \lhd \neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rhd \psi) \vee (\psi \lhd \neg\psi)$;

И2) $\neg\varphi \rhd \psi \leftrightarrow \neg(\varphi \rhd \psi) \& (\neg\psi \rhd \psi)$, $\neg\varphi \lhd \psi \leftrightarrow \neg(\varphi \lhd \psi) \vee (\neg\psi \lhd \psi)$;

И3) $(\varphi \& \psi) \rhd \chi \leftrightarrow (\varphi \rhd \chi) \& (\psi \rhd \chi)$, $(\varphi \& \psi) \lhd \chi \leftrightarrow (\varphi \lhd \chi) \& (\psi \lhd \chi)$;

И4) $(\varphi \vee \psi) \rhd \chi \leftrightarrow (\varphi \rhd \chi) \vee (\psi \rhd \chi)$, $(\varphi \vee \psi) \lhd \chi \leftrightarrow (\varphi \lhd \chi) \vee (\psi \lhd \chi)$;

И5) $\varphi \rhd (\psi \& \chi) \leftrightarrow ((\varphi \& \chi) \rhd \psi) \vee ((\varphi \& \psi) \rhd \chi) \vee (((\varphi \& \neg\chi) \rhd \psi) \& ((\varphi \& \neg\psi) \rhd \chi))$,

$\varphi \lhd (\psi \& \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \neg\chi) \lhd \psi) \& ((\varphi \vee \neg\psi) \lhd \chi) \& (((\varphi \vee \chi) \lhd \psi) \vee ((\varphi \vee \psi) \lhd \chi))$;

И6) $\varphi \rhd (\psi \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \& \neg\chi) \rhd \psi) \vee ((\varphi \& \neg\psi) \rhd \chi) \vee (((\varphi \& \chi) \rhd \psi) \& ((\varphi \& \psi) \rhd \chi))$,

$\varphi \lhd (\psi \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \lhd \psi) \& ((\varphi \vee \psi) \lhd \chi) \& (((\varphi \vee \neg\chi) \lhd \psi) \vee ((\varphi \vee \neg\psi) \lhd \chi))$;

И7) $(\varphi \rhd \psi) \rhd \psi \leftrightarrow \varphi \rhd \psi$, $(\varphi \lhd \psi) \lhd \psi \leftrightarrow \varphi \lhd \psi$.

где φ, ψ и χ – формулы, а операции $\rhd$ и $\lhd$ таковы, что

М0) $0 \rhd 0 \leftrightarrow 0$, $1 \rhd 0 \leftrightarrow 1$, $0 \rhd 1 \leftrightarrow 0$, $1 \rhd 1 \leftrightarrow 0$;

М1) $0 \lhd 0 \leftrightarrow 1$, $1 \lhd 0 \leftrightarrow 1$, $0 \lhd 1 \leftrightarrow 0$, $1 \lhd 1 \leftrightarrow 1$.

2. Семантика

Выберем в качестве стандартной области интерпретации интервальной динамической логики логическую область. Будем предполагать, что предметные (пропозиционные) переменные имеют истинностные значения, которые изменяются во времени. В этом случае каждую предметную переменную можно представить как интервал времени, формируемый из тех его моментов, при которых эта переменная выполнима, т.е. имеет истинное значение.

Интерпретация операций $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ стандартная (рис. 1). Это логические связки НЕ, И и ИЛИ соответственно. В свою очередь операции $\rhd$ и $\lhd$ являются модальными и предназначены для конструирования интервалов, не выразимых формулами со стандартными логическими операциями. Так формула $A \rhd B$ имеет исходное значение 0, принимает значение 1 в момент невыполнения A при истинном B, а затем принимает значение 0 в момент невыполнения A при ложном B. В противоположность этому формула $A \lhd B$ имеет исходное значение 1, принимает значение 0 в момент выполнения A при ложном B, а затем принимает значение 1 в момент выполнения A при истинном B.

Теорема 1. *Интервальная динамическая логики непротиворечива, полна и разрешима в логической области интерпретации.*

Следует обратить внимание на интерпретацию статических описаний М0 и М1 модальных операторов $\rhd$ и $\lhd$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были одновременные изменения значений формул φ и ψ в начальный момент времени, итоговые значения модальных операторов $\varphi \rhd \psi$ и $\varphi \lhd \psi$ описываются формулами М0 и М1 соответственно.*

Для выражения полуинтервалов в интервальной динамической логике используются следующие формулы:

$$\neg\varphi \rhd \varphi, \quad \neg\varphi \lhd \varphi, \tag{1}$$

В этом случае первая формула выражает полуинтервал $[t_1, +\infty)$, значение t_1 которого совпадает с моментом первой выполнимости формулы φ, а вторая формула – полуинтервал $(-\infty, t_2]$, значение t_2 которого совпадает с моментом первой выполнимости формулы $\neg\varphi$ (рис. 2). Для удобства выражения полуинтервалов введем следующие синтаксические эквивалентности:

$$\neg\varphi \rhd \varphi \sim \Delta\varphi,\ \neg\varphi \lhd \varphi \sim \nabla\varphi. \qquad (2)$$

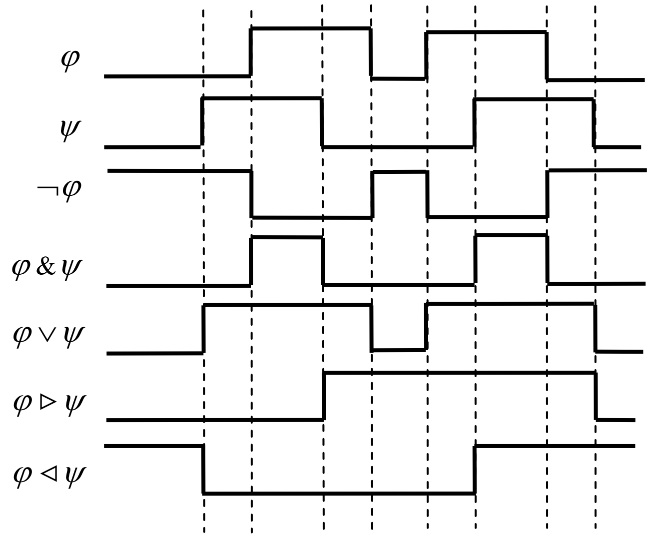

Рис. 1. Интерпретация операций

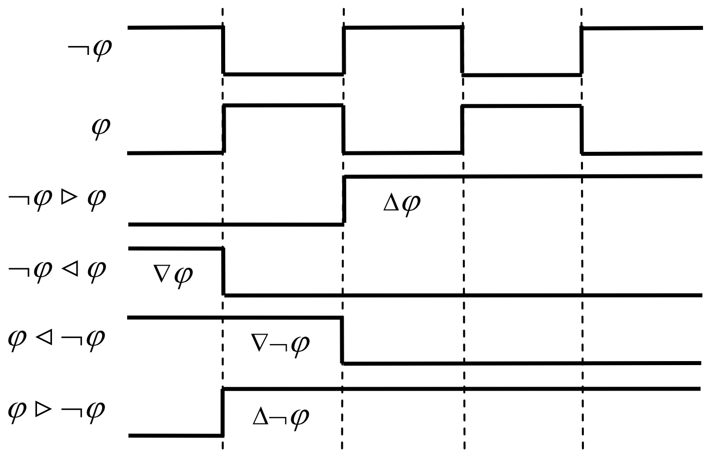

Рис. 2. Полуинтервалы

3. Прагматика

Определим вторую областью интерпретации интервальной динамической логики – ее прагматику. В отличие от первой области – статической, вторую будем называть динамической, и использовать для представления и вывода пропозиционных свойств дискретных динамических объектов, т.е. объектов, описываемых дискретными (логическими) сигналами и функционирующих в дискретные моменты времени.

В этом случае прагматика операций интервальной динамической логики может быть задана комбинационными и последовательностными элементами, приведенными на рис. 3.

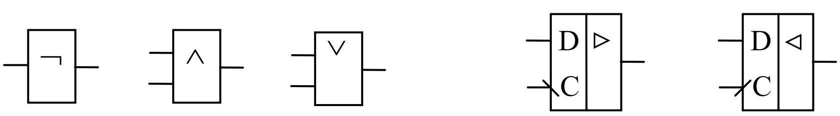

Рис. 3. Комбинационные и последовательностные элементы

Теорема 3. *Аксиомы интервальной динамической логики тождественно-истинны в динамической области интерпретации.*

Для доказательства эквивалентности формул можно также воспользоваться временными диаграммами, описывающими функционирование соответствующих схем при различных комбинациях входных сигналов и их взаимном расположении относительно друг друга.

Теорема 4. *В интервальной динамической логике для любых формул φ, ψ и константы κ справедливы следующие тождества:*

$$\varphi \rhd \varphi \leftrightarrow 0, \quad \varphi \lhd \varphi \leftrightarrow 1, \tag{3}$$

$$0 \rhd \varphi \leftrightarrow 0, \quad 1 \lhd \varphi \leftrightarrow 1, \tag{4}$$

$$1 \rhd \varphi \leftrightarrow \neg\varphi \rhd \varphi, \quad 0 \lhd \varphi \leftrightarrow \neg\varphi \lhd \varphi, \tag{5}$$

$$\varphi \rhd 1 \leftrightarrow 0, \quad \varphi \lhd 0 \leftrightarrow 1, \tag{6}$$

$$\varphi \rhd 0 \leftrightarrow \kappa, \quad \varphi \lhd 1 \leftrightarrow \kappa, \tag{7}$$

где κ – константа, равная истинностному значению φ в начальный момент времени.

3. Демонстрационный пример

Основными прикладными задачами интервальной динамической логики являются задача синтеза и задача анализа. Задача синтеза заключается в описании на языке интервальной динамической логики функционирования во времени некоторого устройства, заданного своей временной диаграммой. В противоположность этому, задача анализа заключается в построении временной диаграммы функционирования некоторого устройства по его описанию на языке интервальной динамической логики.

Опишем на языке интервальной динамической логики некоторый процесс, заданный временной диаграммой на рис. 4. При построении формулы будем исходить из того, что при мониторинге процесса должна выполняться конструируемая формула.

Разобьём временную диаграмму на четыре последовательных интервала: 1, 2, 3, 4, задаваемых характерными моментами процесса. Выразим эти интервалы через формулы с темпоральными операциями:

$$\neg\Delta A, \quad A, \quad \neg(A \lhd \neg B), \quad \Delta B.$$

Теперь запишем условия, проверяемые на каждом интервале:

$$\neg A \wedge B \wedge (c = \mathrm{c1}), \ \neg B \wedge (c > \mathrm{c1}), \ \neg A \wedge \neg B \wedge (c = \mathrm{c2}), \ \neg A \wedge B \wedge (c = \mathrm{c2}).$$

Объединим формулы, описывающие каждый из интервалов, и получим

$$\begin{gathered}(\nabla\neg A \wedge (\neg A \wedge B \wedge (c = \mathrm{c1}))) \vee \\ (A \wedge \neg B \wedge (c > \mathrm{c1})) \vee \\ (\neg A \rhd B) \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge (c = \mathrm{c2}))) \vee \\ (\Delta B \wedge (\neg A \wedge B \wedge (c = \mathrm{c2}))).\end{gathered}$$

Заметим, что реализация найденной формулы дает устройство или алгоритм для мониторинга процесса, описанного с помощью заданной временной диаграммы. ♦

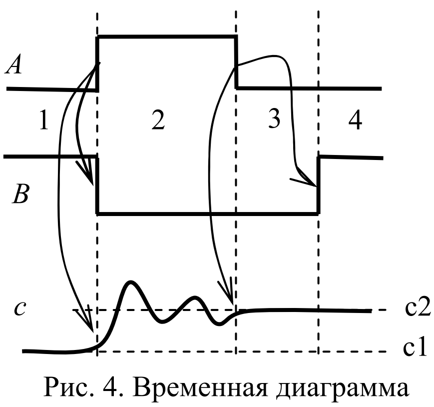

Рис. 4. Временная диаграмма

Заключение

Динамический характер разработанной логики определяется тем, что проверка выполнимости формул осуществляется в каждый текущий момент времени, причем сам текущий момент времени определяется не абсолютно, а по каким-либо изменениям предметных переменных.

Как оказалось, наблюдаемое в настоящее время обилие всевозможных логик не является исчерпывающим, так как не позволяет выразить в естественной форме динамическую концепцию времени.

Литература

1. Vila L. A survey on temporal reasoning in artificial intelligence // AI Communications. – Vol. 7, 1. – 1994. P. 4-28.
2. Russell B. Principles of Mathematics. – London: George & Unwin, 1903. – 586 p.
3. Prior A.N. Past, Present and Future. – Oxford: Clarendon Press, 1967. – 228 p.
4. Allen J.F. Maintaining Knowledge about Temporal Intervals // Communications of the ACM. – 1983. – Vol. 26, No. 11. – P. 832-843.
5. Анисов А.М. Время и компьютер. Негеометрический образ времени. – М.: Наука, 1991. – 152 с.
6. Кондрашина Е.Ю., Литвинцева Л.А., Поспелов Д.А. Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1989. – 328 с.
7. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени: Пер. с англ. – М.: КомКнига, 2005. – 232 с.
8. Harel D., Kozen D., Tiuryn J. Dynamic logic. – Cambridge: MIT Press, 2000. – 476 p.
9. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Том I. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1979. – 560 с.