

Теоретические основы информатики

Лекция L02
«Математические основы»

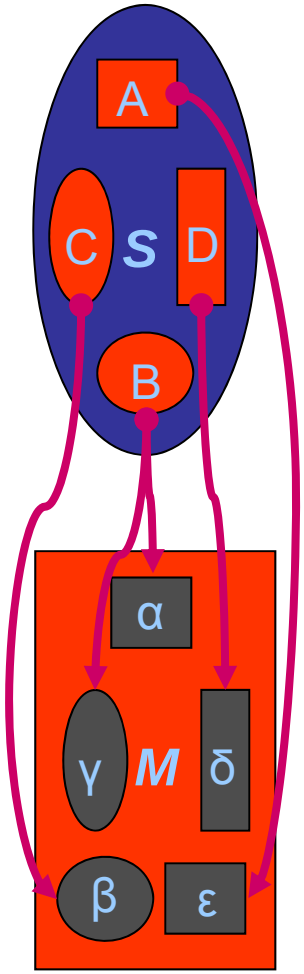
http://vykhovanets.ru/course56/

Рациональное познание

- **Понятие** – форма мысли, выделяющая в реальности некоторую сущность и ее называющая: субъект s, предикат p, объект o, атрибут a.
- **Суждение** – форма мысли, что-либо утверждающая : A ~ s p o a (может быть истинное или ложное).
- **Умозаключение** – умственное действие, связывающее суждения-посылки с суждениями-следствиями (утверждениями): A & B $\rightarrow$ A $\vee$ B.
- **Рассуждение** – мыслительная деятельность, направленная на получение из суждений-посылок суждений-следствий (утверждений).
- **Теория** – множество суждений-следствий (утверждений, теорем), полученных в процессе рассуждения из некоторого множества суждений-посылок (аксиом).

Идентификация

- **Идентификация** – установление тождества двух систем – реальной и формальной, причем последняя заменяет реальную систему, воспроизводя ее свойства и поведение.



Модель

- **Модель** – формальная система, задаваемая как неинтерпретированное исчисление (формальная теория), индуктивно порождающее:
  – множество допустимых формул из элементарных формул (термов) и правил образования (построения) формул;
  – множество доказуемых формул (теорем) посредством определения множества аксиом и правил вывода теорем из аксиом и уже доказанных теорем.

Формальная система

- Алфавит

  $\{a, b, \#\}$
- Синтаксис формул

  ‹Формула› ::= $a \mid b \mid \#$

  ‹Формула› ::= ‹Формула›‹Формула›
- Аксиома

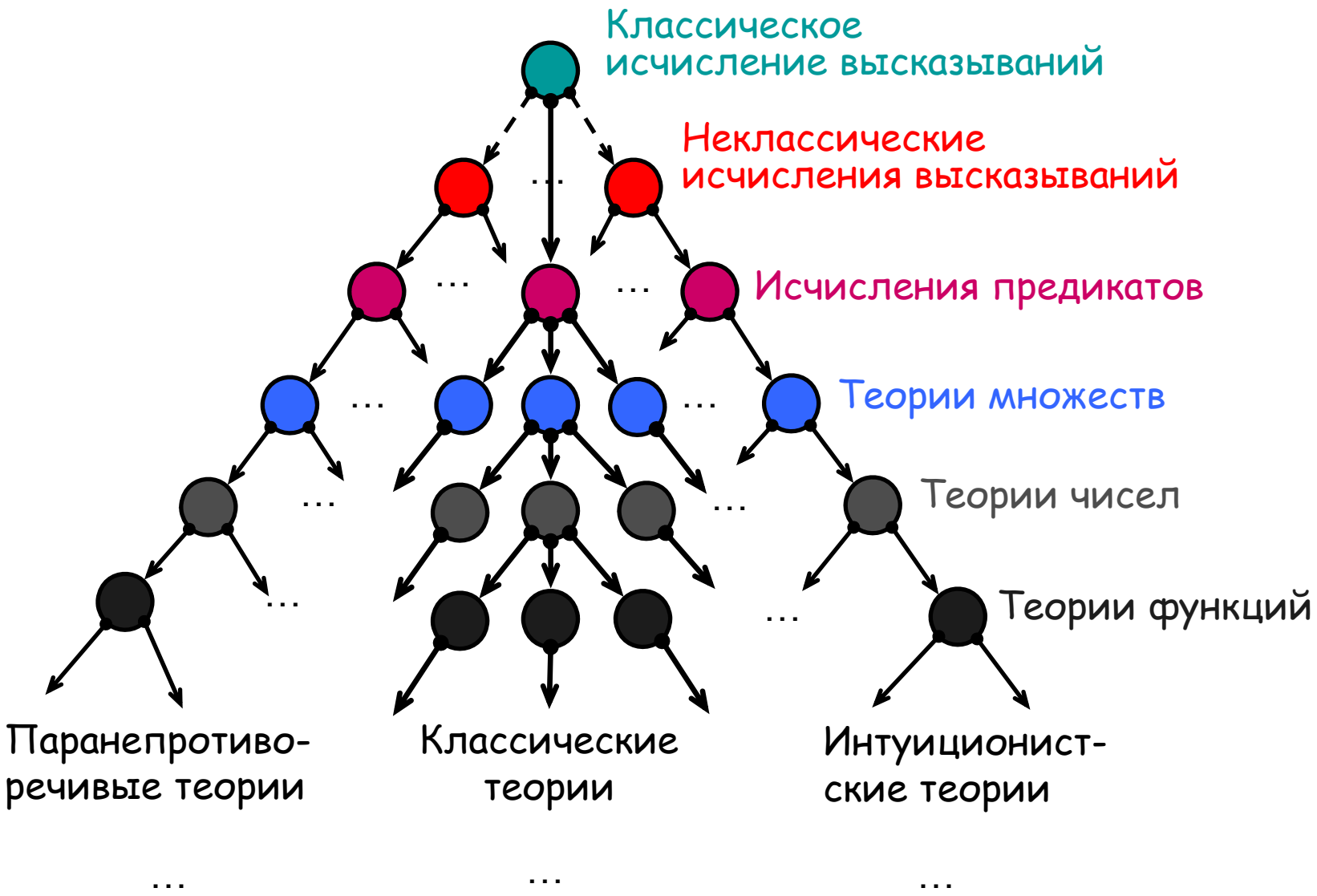
  $a\#a$
- Продукционные правила

  $x\#y \rightarrow bx\#yb$

Некоторые теоремы:

$a\#a$ $ba\#ab$ $bba\#abb$ $bbba\#abbb$ ...

Решетка теорий



Общие законы логики

Закон тождества

- Предмет суждения должен оставаться тождественным самому себе в каждом рассуждении:

$$A \rightarrow A.$$

Закон противоречия

- Два противоположных суждения не могут быть одновременно истинными:

$$\neg(A \wedge \neg A).$$

Закон исключенного третьего

- Два противоположных суждения не могут быть одновременно ложными:

$$A \vee \neg A.$$

Закон достаточного основания

- В каждом умозаключении посылками могут быть только истинные суждения:

$$A, B \rightarrow A \wedge B.$$

Классическая логика

«S есть O или не есть O»

Алфавит:

высказываний $A = \{a, b, \dots, z, aa, \dots\}$,

операций $B = \{\neg, \rightarrow, (,), \forall, \exists\}$.

Синтаксис:

$a, \varphi \epsilon A$, (φ), $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \varphi$, $\forall a(\varphi)$, $\exists a(\varphi)$.

Аксиомы предикатов:

$\varphi(a) \rightarrow \exists b(\varphi(b))$,

$\forall a(\varphi(a)) \rightarrow \varphi(b)$.

Правила вывода:

подстановки $\varphi(\psi) \sim \varphi(\gamma)$,

заключения $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \sim \psi$.

Аксиомы высказываний:

тождества $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)\big)$,

противоречия $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$,

исключенного третьего $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

Закон тождества	$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \leftrightarrow a \rightarrow a$
Закон противоречия	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge \neg a)$
Закон исключенного третьего	$a \rightarrow (b \rightarrow a) \leftrightarrow \neg a \vee a$
Закон достаточного основания	$a \wedge (a \rightarrow b) \wedge b \leftrightarrow a \wedge b$

Исчисление высказываний рекурсивно перечисляет все тождественно-истинные высказывания, т.е. моделирует законы дедуктивного рассуждения.

Интуиционистская логика

«Неверно, что S есть O или не есть O»

Алфавит:

высказываний $A = \{a, b, \dots, z, aa, \dots\}$,

операций $B = \{\neg, \to, (,), \forall, \exists\}$.

Синтаксис:

$\varphi \epsilon A,\ (\varphi),\ \neg\varphi,\ \varphi \to \varphi.$

Аксиомы предикатов:

$\varphi(a) \to \exists b(\varphi(b)),$

$\forall a(\varphi(a)) \to \varphi(b).$

Правила вывода:

подстановки $\varphi(\psi) \sim \varphi(\gamma),$

заключения $\varphi, \varphi \to \psi \sim \psi.$

Аксиомы высказываний:

тождества $\big(\varphi \to (\psi \to \gamma)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma)\big),$

противоречия $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi),$

исключенного третьего $\varphi \to (\psi \to \varphi).$

Закон тождества	$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \leftrightarrow a \to a$
Закон противоречия	$(a \to b) \to (\neg a \to \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge \neg a)$
Закон исключенного третьего	$a \to (b \to a) \leftrightarrow \neg a \vee a$
Закон достаточного основания	$a \wedge (a \to b) \wedge b \leftrightarrow a \wedge b$

Колмогоров,
1925

Паранепротиворечивая логика

«S есть O и не есть O»

Алфавит:

высказываний $A = \{a, b, \dots, z, aa, \dots\}$,

операций $B = \{\neg, \rightarrow, (,), \forall, \exists\}$.

Синтаксис:

$\varphi \epsilon A,\ (\varphi),\ \neg\varphi,\ \varphi \rightarrow \varphi.$

Аксиомы предикатов:

$\varphi(a) \rightarrow \exists b(\varphi(b)),$

$\forall a(\varphi(a)) \rightarrow \varphi(b).$

Правила вывода:

подстановки $\varphi(\psi) \sim \varphi(\gamma),$

заключения $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \sim \psi.$

Аксиомы высказываний:

тождества $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)\big),$

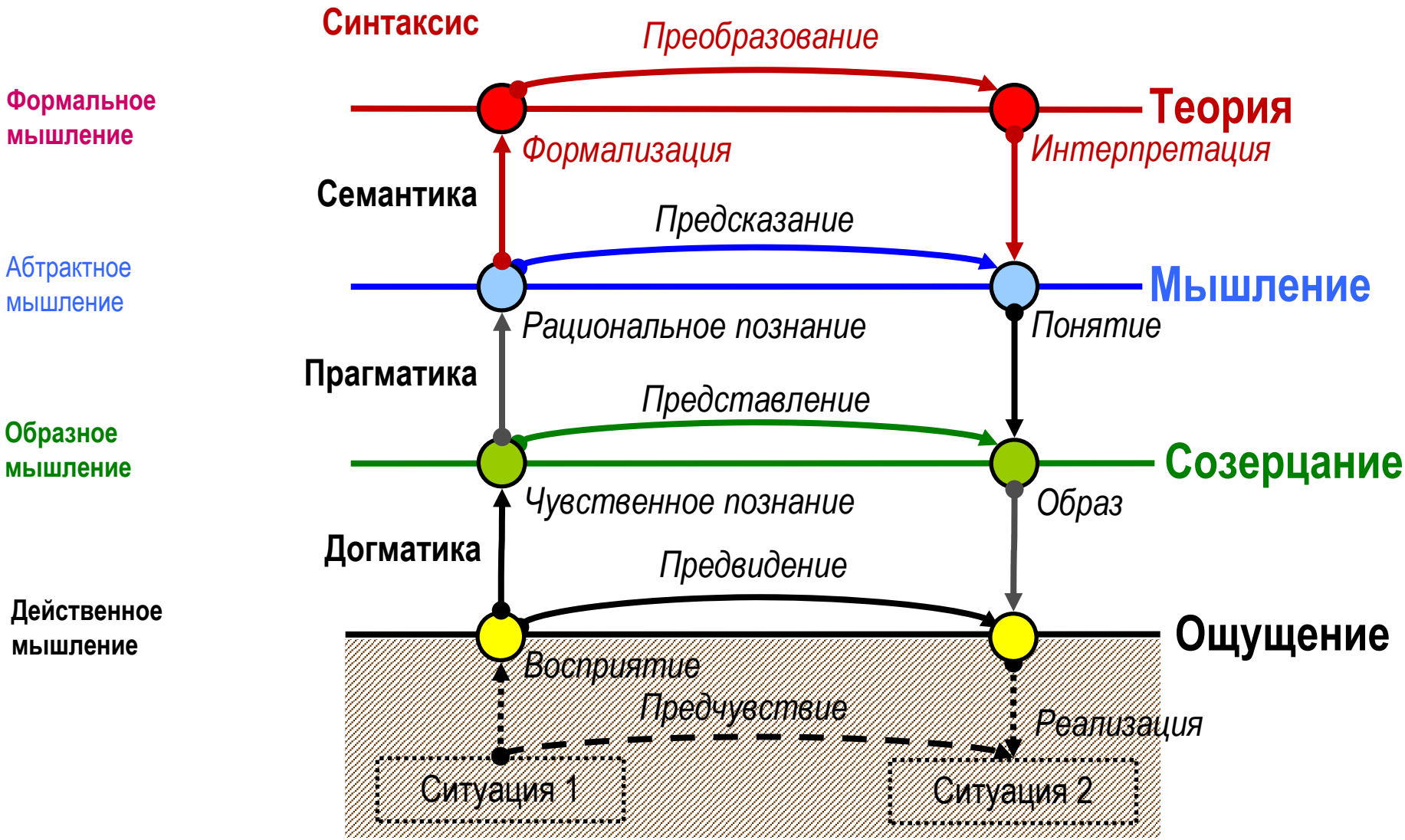
противоречия $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi),$

исключенного третьего $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$

Закон тождества	$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \leftrightarrow a \rightarrow a$
Закон противоречия	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge \neg a)$
Закон исключенного третьего	$a \rightarrow (b \rightarrow a) \leftrightarrow \neg a \vee a$
Закон достаточного основания	$a \wedge (a \rightarrow b) \wedge b \leftrightarrow a \wedge b$

Васильев,
1910

Феномен формализации

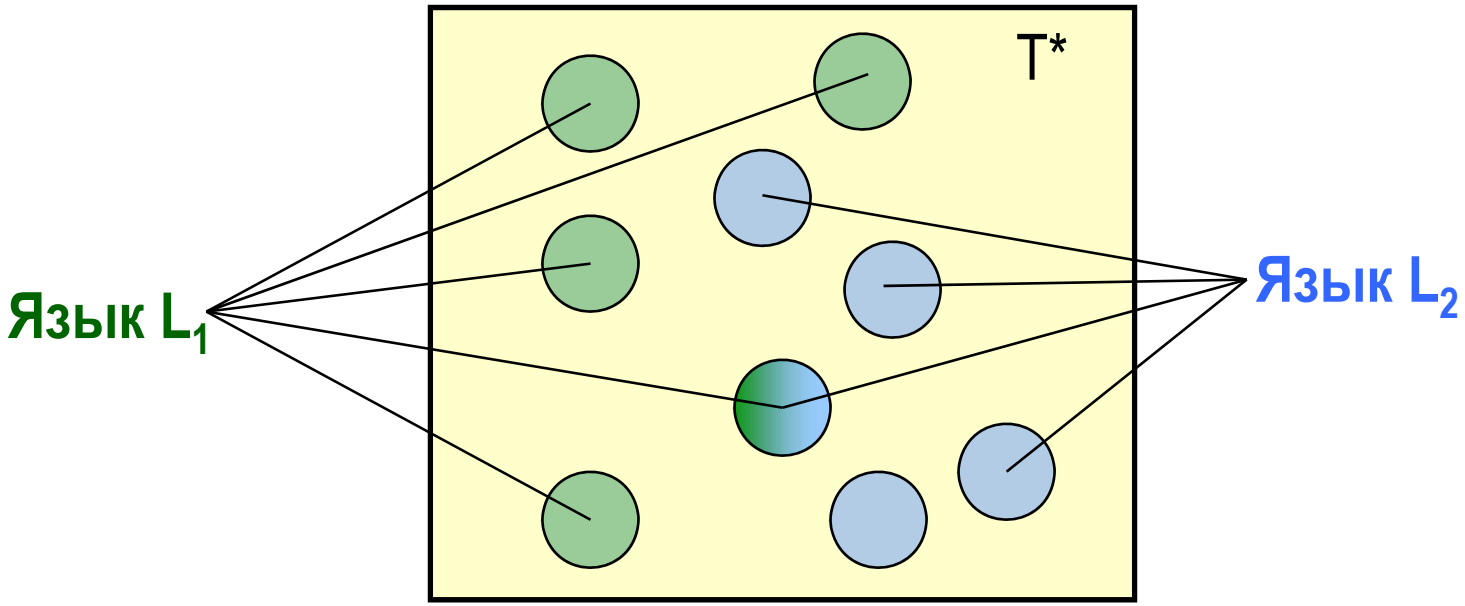


Формальный язык

Формальный язык – подмножество универсального множества строк T*

Грамматика – формальное средство для задания формальных языков

Грамматики:
– регулярные,
– контекстно-свободные,
– контекстные,
– произвольные.



$$G(L) =< T, N, P, I >$$

$$G(L) =< \{0,1\}, \{I, J\}, P, I >,$$
$$P = \{I \to 0 \mid J, J \to 1 \mid J0 \mid J1\}$$

$$I \Rightarrow 0, \quad I \Rightarrow J \Rightarrow 1, \quad I \Rightarrow J \Rightarrow J0 \Rightarrow 10, \ \ldots$$

Языки формализации

Не все задачи решаются

- **Специализированные**:
  – предметно-ориентированные (Postscript);
  – проблемно-ориентированные (SQL).

Решаются «любые» задачи

- **Универсальные**:
  – императивные (C, C++, Java, C#, Pyton);
  – декларативные (Prolog).

Возможно расширение языка

- **Метаязыки**:
  – регулярные (FORTH);
  – бесконтекстные (Рефал, Nemerle, MPS);
  – контекстные (**?**).

Создаются другие языки

- **Протоязыки**:
  – дедуктивные (YACC, Bison);
  – индуктивные (**?**).

Классификация Хомского

- Типа 3 – Регулярные (конечно-автоматные)

Эффективно разрешимые

$$P = \{A \to a \mid aB \parallel a \in T,\ A, B \in N\}$$

- Типа 2 – Контекстно-свободные

Практически разрешимые

$$P = \{A \to \alpha \parallel \alpha \in (T \cup N)^*\}$$

- Типа 1 – Контекстно-зависимые

Теоретически разрешимые

$$P = \{\alpha\Omega\beta \to \alpha\omega\beta \parallel \Omega \in N,\ \alpha, \beta, \omega \in (T \cup N)^*\}$$

- Типа 0 – Произвольные

Неразреши-мые, перечис-лимые

$$P = \{\alpha \to \beta \parallel \alpha, \beta \in (T \cup N)^*\}$$

- Типа ? – Неперечислимые

Неразреши-мые, непере-числимые

$$P = \{?\}$$

Разрешимость – существование процедуры определения принадлежности произвольной строки языку.

Перечислимость – существование процедуры порождение строк языка.

Логические исчисления

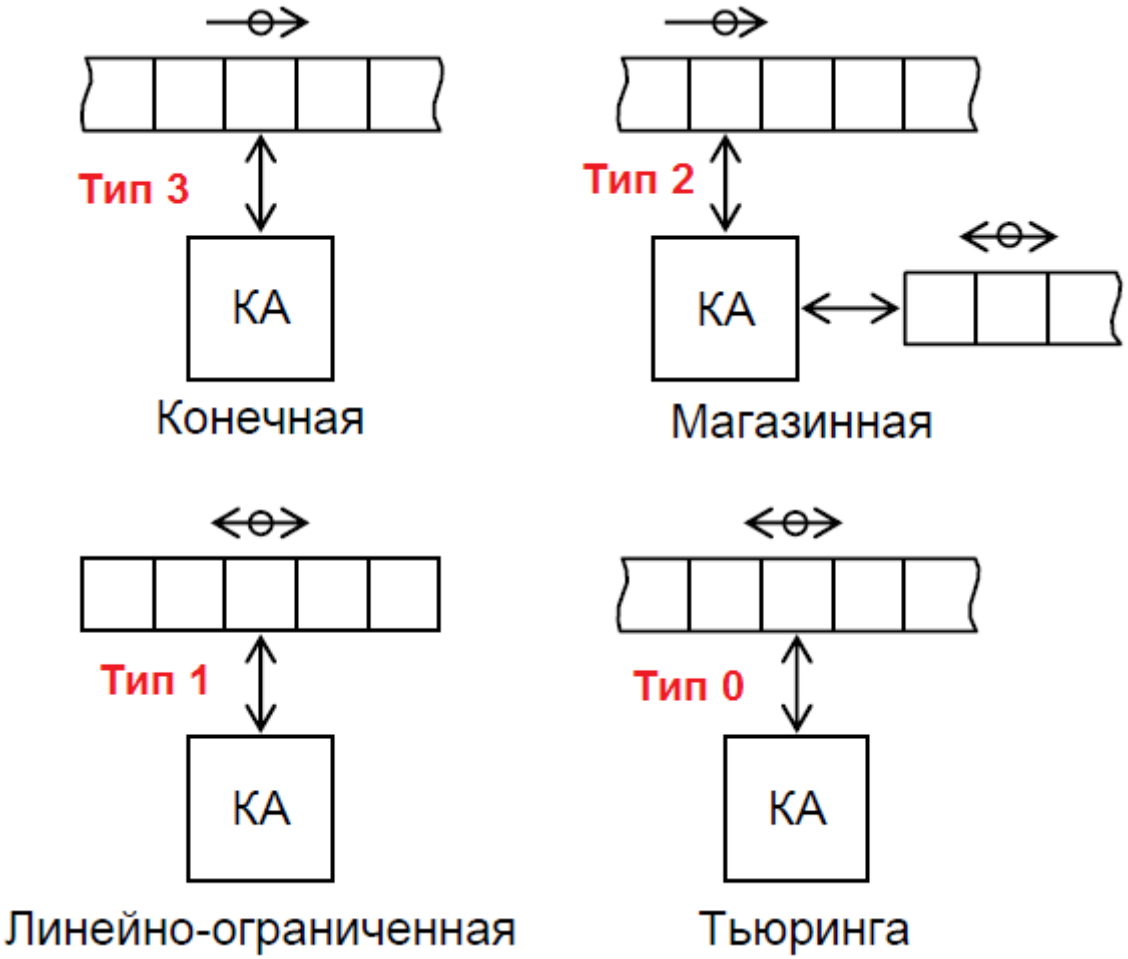
Исчисление высказываний – разрешимо, перечислимо

- Тип 1 $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \gamma))$
- Тип 2 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- Тип 1 $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

Исчисление предикатов – неразрешимо, перечислимо

- Тип 2 $\varphi \to \exists b(\varphi)$
- Тип 0 $\forall a(\varphi) \to \varphi$

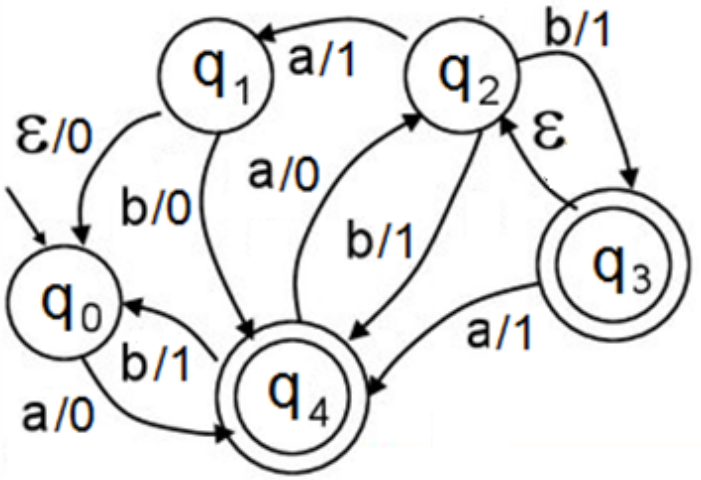
Вычислительные модели

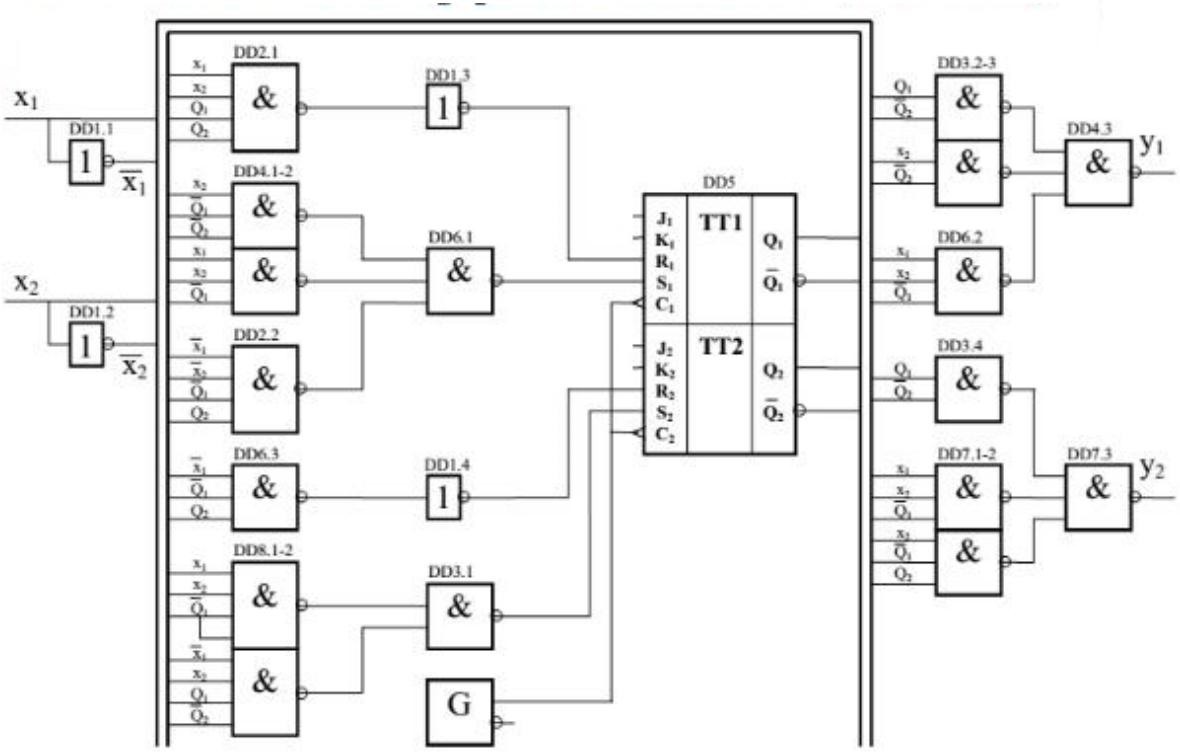


Конечный автомат

$К = \{A, Q, B, \delta, \lambda, q\}$

A - входное множество;
Q - множество состояний
B - выходное множество;
$\delta: A \times Q \to Q$ - функция переходов;
$\lambda: A \times Q \to B$ - функция выходов;
q - начальное состояние.





$A = \{\varepsilon, a, b\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$B = \{\varepsilon, 0, 1\}$

$aq_0 \to 0q_4 \quad aq_4 \to 0q_2$
$bq_4 \to 1q_0 \quad bq_2 \to 1q_4$
$\varepsilon q_1 \to 0q_0 \quad aq_3 \to 1q_4$
$bq_1 \to 0q_4 \quad \varepsilon q_3 \to \varepsilon q_3$
$aq_2 \to 1q_1 \quad bq_2 \to 1q_3$

$q = q_0$

Информационная система



Синтаксис и семантика



Синтаксис – отношения между знаками языка (Ч. Моррис)

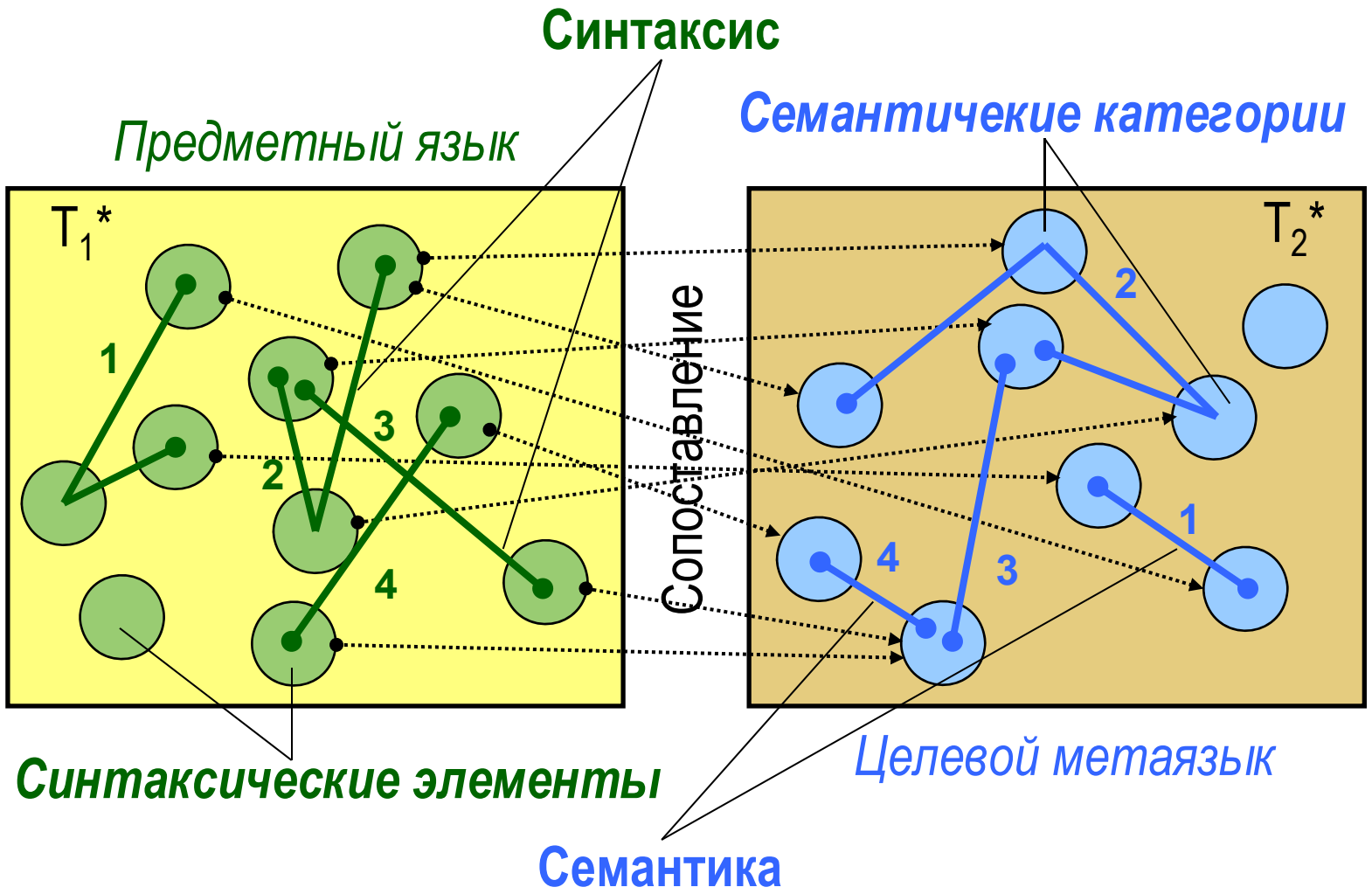
Семантика – отношения между знаками и «мыслимым миром» (Р. Монтегю)

Описание семантики

Принцип композицион-ности: семантика целого строится из семантики частей (Г. Фреге)

Синтаксичес-кие элементы предметного языка – неделимые единицы синтаксиса

Семантичес-кие категории метаязыка – неделимые единицы смысла



Методы описания семантики

- **Непосредственный** – прямое сопоставление строк двух формальных языков.
- **Аксиоматический** – сопоставление правилам вывода формул аксиоматической теории, задаваемой аксиомами и правилами вывода.
- **Алгебраический** – сопоставление правилам вывода формул алгебраической теории, задаваемой множеством и операциями на нем.
- **Денотационный** – сопоставление правилам вывода композиций функциональных денотатов.
- **Операционный** – сопоставление правилам вывода последовательности команд интерпретатора.
- **Индуктивный** – сопоставление правилам вывода строк самого определяемого языка.

Непосредственная семантика

$$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Метод описания семантики

Метаязык – натуральные числа

0	$\{S \leftarrow 0\}$
1	$\{S \leftarrow 1\}$
10	$\{S \leftarrow 2\}$
11	$\{S \leftarrow 3\}$
100	$\{S \leftarrow 4\}$
101	$\{S \leftarrow 5\}$
...	...

Предметный язык – двоичные числа

101 $S \leftarrow 5$

$S \leftarrow 5$

Аксиоматическая семантика

$$\exists 0; \quad \forall a \exists a'; \quad \forall a(\neg(a' = 0)); \quad \forall a(a + 0 = a); \quad \ldots$$

Метод описания семантики

Метаязык – формальная арифметика

$$I \to 0 \quad \{S_I \leftarrow 0\}$$
$$I \to J \quad \{S_I \leftarrow S_J\}$$
$$J \to 1 \quad \{S_J \leftarrow 0'\}$$
$$J \to J0 \quad \{S_J \leftarrow (S_J) * (0' + 0')\}$$
$$J \to J1 \quad \{S_J \leftarrow (S_J) * (0' + 0') + 0'\}$$

Предметный язык – двоичные числа

$$I \to J \quad J \to J1 \quad J \to J0 \quad J \to 1$$

$$I \Rightarrow J \Rightarrow J1 \Rightarrow J01 \Rightarrow 101$$

$$S_J \leftarrow 0'$$
$$S_J \leftarrow (S_J) * (0' + 0')$$
$$S_J \leftarrow (S_J) * (0' + 0') + 0'$$
$$S_I \leftarrow S_J$$

$$S_I \leftarrow ((0') * (0' + 0')) * (0' + 0')) + 0'$$

Алгебраическая семантика

$$A =< N,+,* >$$

Метод описания семантики

Метаязык – алгебра натуральных чисел

$$I \to 0 \quad \{S_I \leftarrow 0\}$$
$$I \to J \quad \{S_I \leftarrow S_J\}$$
$$J \to 1 \quad \{S_J \leftarrow 1\}$$
$$J \to J0 \quad \{S_J \leftarrow (S_J)*2\}$$
$$J \to J1 \quad \{S_J \leftarrow (S_J)*2+1\}$$

Предметный язык – двоичные числа

$$I \to J \quad J \to J1 \quad J \to J0 \quad J \to 1$$

$$I \Rightarrow J \Rightarrow J1 \Rightarrow J01 \Rightarrow 101$$

$$S_J \leftarrow 1$$
$$S_J \leftarrow (1)*2$$
$$S_J \leftarrow ((1)*2)*2+1$$
$$S_I \to S_J$$

$$S_I \leftarrow ((1)*2)*2)+1$$

Денотационная семантика

$$F =< 0, 1, f, g >, \quad gx = x * 2, \quad fx = x + 1$$

Метод описания семантики

Метаязык – λ-исчисление Черча

$$I \to 0 \quad \{S_I \leftarrow 0\}$$
$$I \to J \quad \{S_I \leftarrow S_J\}$$
$$J \to 1 \quad \{S_J \leftarrow 1\}$$
$$J \to J0 \quad \{S_J \leftarrow (\lambda x.gx)S_J\}$$
$$J \to J1 \quad \{S_J \leftarrow (\lambda x.fgx)S_J\}$$

Предметный язык – двоичные числа

$$I \to J \to J1 \to J0 \to 1$$

$$I \Rightarrow J \Rightarrow J1 \Rightarrow J01 \Rightarrow 101$$

$$S_J \leftarrow 1$$
$$S_J \leftarrow (\lambda x.gx)1$$
$$S_J \leftarrow (\lambda x.fgx)(\lambda x.gx)1$$
$$S_I \leftarrow S_J$$

$$S_I \leftarrow (\lambda x.fgx)(\lambda x.gx)1$$

Операционная семантика

$$K = \{mov\ A, B;\ shl\ A, B;\ inc\ A\}$$

Метод описания семантики

Метаязык – машинные команды

$$I \to 0 \quad \{S_I \leftarrow mov\ V, 0;\}$$
$$I \to J \quad \{S_I \leftarrow S_J\}$$
$$J \to 1 \quad \{S_J \leftarrow mov\ V, 1;\}$$
$$J \to J0 \quad \{S_J \leftarrow S_J\ shl\ V, 1;\}$$
$$J \to J1 \quad \{S_J \leftarrow S_J\ shl\ V, 1;\ inc\ V;\}$$

Предметный язык – двоичные числа

$I \to J$, $J \to J1$, $J \to J0$, $J \to 1$

$$I \Rightarrow J \Rightarrow J1 \Rightarrow J01 \Rightarrow 101$$

$$S_J \leftarrow mov\ V, 1;$$
$$S_J \leftarrow S_J\ shl\ V, 1;$$
$$S_J \leftarrow S_J\ shl\ V, 1;\ inc\ V;$$
$$S_I \leftarrow S_J$$

$$S_I \leftarrow mov\ V, 1;\ shl\ V, 1;\ shl\ V, 1;\ inc\ V;$$

Индуктивная семантика

```
() String ()
        ″'.*' ″ { … }
        String '&' String { … }
() Expression ()
        ″[0-9]+″ [n] { n } dif { '0' }
        'x' { 'x' } dif { '1' }
        '(' Expression ')' [e]
              { '(' & e & ')' } dif { '(' & dif { e } & ')' }
        '-' Expression [e]
              { '-' & e } dif { '-' & dif { e } }
        Expression [e1] '*' Expression [e2]
              { e1 & '*' & e2 }
              dif { '('& e1 & '*' & dif { e2 } & '+' & dif { e1 } & '*' & e2 & ')' }
        Expression [e1] ″+|-″ [o] Expression [e2]
              { e1 & o & e2 } dif { '(' & dif { e1 } & o & dif { e2 } & ')' }
```

```
dif < -x*x+5*(x–3) >  →  -(x*1+1*x)+(5*(1-0)+0*(x-3))
equ< dif{ -x*x+5*(x–3) } >  →  -2*x+5
```

Литература

1. Турчин В.Ф. Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции. Изд. 2-е – М.: ЭТС, 2000.– 368 с.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 416 с.
3. Выхованец В.С. Описание семантики контекстно-свободных языков методом математической индукции // НТИ, Сер. 2. Информационные процессы и системы. – 2008, № 7 – С. 6-14.

